

# **Ein Ansatz zur Stabilitätsuntersuchung von Systemen mit nicht konstanter Abtastung**

Von der Fakultät für Elektrotechnik, Informationstechnik, Physik  
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

zur Erlangung der Würde

eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

genehmigte Dissertation

von

Dipl.-Ing. Marcus Grobe

aus Braunschweig

Eingereicht am:	28. November 2008
Mündliche Prüfung am:	01. Dezember 2009
Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. W. Schumacher
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. E. Schnieder

2009



# Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Regelungstechnik an der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig. Mein Dank gilt besonders dem Leiter des Instituts für Regelungstechnik, Herrn Prof. Dr.-Ing. Walter Schumacher, für die Ermöglichung dieser Arbeit und für die Freiheiten, die er mir bei der Bearbeitung der Aufgabe gegeben hat.

Für die Übernahme der Mitberichterstattung danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. Eckehard Schnieder vom Institut für Verkehrssicherheit und Automatisierungstechnik, sowie Herrn Prof. em. Dr.-Ing. Dr. h. c. Werner Leonhard vom Institut für Regelungstechnik für die Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission.

Bei allen Mitarbeitern des Instituts sowie meinen ehemaligen Studenten bedanke ich mich für die gute Zusammenarbeit und die offene Arbeitsatmosphäre.

Frau Dipl.-Ing. Mareile Dörge, Herrn Dr.-Ing. Klaus Jaschke und Herrn Prof. Dr.-Ing. Ulrich Schneider danke ich ganz herzlich für das sorgfältige Korrekturlesen, die vielen wertvollen Hinweise und die stetigen Ermutigungen zum Durchhalten.

Schlussendlich gilt mein Dank meinen Eltern, die mich immer unterstützten und damit letztlich erst diese Arbeit ermöglichten.

Braunschweig, im November 2008

*Marcus Grobe*



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>III</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>VIII</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>XII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Stand der Technik . . . . .	2
1.2 Gliederung . . . . .	6
<b>2 Grundlagen</b>	<b>8</b>
2.1 Zustandsraumdarstellung . . . . .	8
2.2 Lineare Fraktionaltransformation . . . . .	11
2.2.1 Verallgemeinerte Streckendarstellung . . . . .	14
2.2.2 Satz zur Inversion von LFTs . . . . .	16
2.2.3 Redheffer-Star-Produkt . . . . .	17
2.3 Normen . . . . .	19
2.3.1 Normen von Signalen . . . . .	20
2.3.2 Funktionenräume . . . . .	21
2.3.3 Normen von Systemen – eindimensionaler Fall . . . . .	23
2.3.4 Normen von Systemen – Mehrgrößenfall . . . . .	24
2.3.5 Ein-/Ausgangsbeziehungen . . . . .	26
2.4 Unsicherheiten . . . . .	28
2.4.1 Unstrukturierte Unsicherheiten . . . . .	28
2.4.2 Strukturierte Unsicherheiten . . . . .	31
2.5 Robuste Stabilität . . . . .	32
2.5.1 Small-Gain-Theorem – unstrukturierte Unsicherheiten . . . . .	33
2.5.2 Strukturierter singulärer Wert – strukturierte Unsicherheiten . . . . .	34
<b>3 Ansatz zur Stabilitätsanalyse hybrider Systeme</b>	<b>37</b>
3.1 Modellierung . . . . .	37
3.2 Transformation des Reglers nach $s$ . . . . .	39
3.3 Modellierung der veränderlichen Abtastung . . . . .	41
3.4 Berücksichtigung des Fehlers der bilinearen Transformation . . . . .	43
3.4.1 Modellierung als unstrukturierte Unsicherheit . . . . .	45
3.4.2 Gesamtstruktur . . . . .	46
3.5 Stabilitätsuntersuchungen . . . . .	47
3.6 Zusammenfassung . . . . .	52

<b>4</b>	<b>Versuchsaufbau</b>	<b>54</b>
4.1	Komponenten des Versuchsstandes . . . . .	55
4.2	Überblick über die implementierte Software . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Modellbildung und Reglerentwurf</b>	<b>60</b>
5.1	Modellbildung für die eingesetzten Komponenten . . . . .	60
5.1.1	Fremderregte Gleichstrommaschine . . . . .	60
5.1.2	Permanenterregte Gleichstrommaschine . . . . .	63
5.1.3	Parameterbestimmung und Normierung für die Antriebe . . . . .	64
5.1.4	Parameterbestimmung für die Servoverstärker . . . . .	68
5.2	Regelung einer Gleichstrommaschine . . . . .	69
5.2.1	Stromregelung . . . . .	70
5.2.2	Drehzahlregelung . . . . .	71
5.2.3	Lageregelung . . . . .	73
5.2.4	Differenzlageregelung zweier Antriebe . . . . .	75
5.2.5	Differenzlageregelung mit zusätzlicher Lageregelung . . . . .	76
5.3	Reglerparametrierung für den Versuchsstand . . . . .	78
5.3.1	Entwurf der Drehzahlregler . . . . .	79
5.3.2	Entwurf der Differenzlageregler . . . . .	81
5.3.3	Entwurf des Lagereglers . . . . .	81
<b>6</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>83</b>
6.1	Drehzahlregelkreis . . . . .	83
6.1.1	Simulationsergebnisse – synchroner Betrieb . . . . .	84
6.1.2	Messwerte – synchroner Betrieb . . . . .	85
6.1.3	Filterung . . . . .	89
6.1.4	Simulationsergebnisse – asynchroner Betrieb . . . . .	91
6.1.5	Messwerte – asynchroner Betrieb . . . . .	96
6.2	Differenzlageregler . . . . .	106
6.2.1	Messwerte der Differenzlageregelung – synchroner Betrieb . . . . .	106
6.2.2	Messwerte der Differenzlageregelung – asynchroner Betrieb . . . . .	108
6.3	Lageregler . . . . .	111
6.3.1	Messwerte der Lageregelung – synchroner Betrieb . . . . .	111
6.3.2	Simulationsergebnisse der Lageregelung – synchroner Betrieb . . . . .	112
6.3.3	Messwerte der Lageregelung – asynchroner Betrieb . . . . .	115
6.4	Stabilitätsuntersuchung am Prüfstand . . . . .	118
6.4.1	Modellierung der Strecke . . . . .	118
6.4.2	Beschreibung der Regler . . . . .	120
6.4.3	Bilineare Transformation der Regler . . . . .	121
6.4.4	Modellierung der Abtastzeit als strukturierte Unsicherheit . . . . .	122
6.4.5	Modellierung der Fehler als unstrukturierte Unsicherheit . . . . .	123
6.4.6	Definition der Gesamtunsicherheit . . . . .	123
6.4.7	Untersuchung des Systems auf robuste Stabilität . . . . .	127
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>133</b>

**Literatur**

**135**

# Symbolverzeichnis

In der Notation der Formeln dieser Arbeit wird nicht zwischen skalaren, vektoriellen und matrixwertigen Größen unterschieden. Dies liegt darin begründet, dass die hergeleiteten Verfahren sowohl für den Eingrößen- als auch für den Mehrgrößenfall gültig sind. Die Dimension der einzelnen Größen ist dem Zusammenhang zu entnehmen.

## Lateinische Formelzeichen

$a_i$	$i$ -ter Polynomkoeffizient des Nenners
$A$	Systemmatrix eines linearen Systems
$b_i$	$i$ -ter Polynomkoeffizient des Zählers
$B$	Eingangsmatrix eines linearen Systems
$C$	Ausgangsmatrix eines linearen Systems
$d_{\max}$	maximales Element der Hauptdiagonale einer Matrix
$D$	Durchgangsmatrix eines linearen Systems
$D_u$	Dämpfung der unregelten Strecke
$D_g$	Dämpfung des geschlossenen Kreises
$e$	Fehlersignal
$e$	induzierte Spannung
$G$	Übertragungsfunktion einer Strecke
$I$	Einheitsmatrix
$i_a$	Ankerstrom
$i_e$	Erregerstrom
$K$	Übertragungsfunktion eines Reglers
$K_i$	Übertragungsfunktion des Stromreglers
$K_\omega$	Übertragungsfunktion des Drehzahlreglers
$K_\varepsilon$	Übertragungsfunktion des Lagereglers
$K_\Delta$	Übertragungsfunktion des Differenzlagereglers
$L$	Induktivität
$M$	Übertragungsfunktion aus Strecke und Regler



---

$m_a$	Antriebsmoment
$m_L$	Lastmoment
$N$	Windungszahl
$n$	Ordnung eines Systems
$P$	verallgemeinerte Strecke
$R$	Widerstand
$s$	Frequenzvariable
$t$	Zeitvariable
$T$	Abtastzeit
$T_0$	nominelle Abtastzeit
$T_a$	Ankerzeitkonstante
$T_e$	Ersatzzeitkonstante
$T_\varepsilon$	Integrierzeitkonstante zur Lage
$T_{ii}$	Zeitkonstante des Stromreglers
$T_{i\omega}$	Zeitkonstante des Drehzahlreglers
$T_n$	Integrierzeitkonstante zur Drehzahl
$T_s$	Zeitkonstante des Stellgliedes
$T_{vz}$	allg. Übertragungsfunktion vom Eingang $z$ zum Ausgang $v$
$u$	Stellgröße
$U_a$	Ankerspannung
$U_e$	Erregerspannung
$v$	externe Ausgänge
$V$	Verstärkungsfaktor
$V_{ri}$	Verstärkung des Stromreglers
$V_{r\omega}$	Verstärkung des Drehzahlreglers
$V_{r\varepsilon}$	Verstärkung des Lagereglers
$V_{r\Delta}$	Verstärkung des Differenzlagereglers
$w$	Eingangsgrößen
$W_u$	Gewichtsfunktion für die Stellgröße
$W_y$	Gewichtsfunktion für die Regelgröße/Regelqualität
$x$	Zustandsgrößen
$\dot{x}$	Ableitung der Zustandsgrößen
$y$	Ausgangsgrößen
$z$	externe Eingänge bzw. Störungen
$z^{-1}$	Verzögerung um einen Abtastschritt

## Griechische Formelzeichen

$\alpha$	Faktor zur Spezifikation von strukturierten Unsicherheiten
$\beta$	Faktor zur Spezifikation von unstrukturierten Unsicherheiten
$\delta$	skalare Unsicherheit
$\delta_{ij}$	$i$ - $j$ -te Element der Unsicherheitsmatrix $\Delta$
$\Delta$	Unsicherheitsmatrix
$\Delta$	Menge aller Blockdiagonalmatrizen
$\Delta_\varepsilon$	Differenzlage
$\Delta_{\varepsilon\text{soll}}$	Differenzlagesollwert
$\delta_{s u}$	skalare strukturierte   unstrukturierte Unsicherheit
$\Delta_{s u}$	strukturierte   unstrukturierte Unsicherheitsmatrix
$\Delta_{\text{sys}}$	Gesamtsystemunsicherheit
$\varepsilon$	Lage
$\varepsilon_{\text{M}}$	Lage des Master-Motors
$\varepsilon_{\text{S}}$	Lage des Slave-Motors
$\varepsilon_{\text{soll}}$	Lagesollwert
$\gamma$	maximaler strukturierter singulärer Wert
$\lambda$	Eigenwert
$\mu_\Delta$	strukturierter singulärer Wert
$\omega$	Drehzahl
$\omega_{\text{M}}$	Drehzahl des Master-Motors
$\omega_{\text{S}}$	Drehzahl des Slave-Motors
$\omega_{\text{soll}}$	Drehzahlsollwert
$\varphi$	Winkel
$\varphi_a$	Ankerfluss
$\varphi_e$	Erregerfluss
$\Psi_e$	Verkettungsfluss
$\Pi$	Menge aller durch die Unsicherheit entstehender Systeme
$\rho$	Spektralradius
$\sigma$	Standardabweichung
$\sigma$	singulärer Wert
$\bar{\sigma}$	maximaler singulärer Wert
$\Theta$	Trägheit

## Sonstige Formelzeichen

$\equiv$	identisch gleich
$ \cdot $	Betrag
$\ \cdot\ $	Norm
$\ \cdot\ _1$	1-Norm
$\ \cdot\ _2$	2-Norm
$\ \cdot\ _\infty$	$\infty$ -Norm
$(\cdot)^*$	konjugiert komplex Transponierte
$(\cdot)^{-1}$	Inverse
$(\cdot)^T$	Transponierte
$\forall$	Allquantor
$\exists$	Existenzquantor
$\det(\cdot)$	Determinante
$\text{Im}(\cdot)$	Imaginärteil
$\inf(\cdot)$	Infimum
$\mathcal{L}_p$	Lebesgue-Raum (Menge aller Signale mit beschränkter $p$ -Norm)
$\mathcal{L}_\infty$	Lebesgue-Raum (Menge aller Signale mit beschränkter $\infty$ -Norm)
$\text{LFT}(\cdot, \cdot)$	Kurzschreibweise für eine untere lineare Fraktionaltransformation
$\text{LFT}_l(\cdot, \cdot)$	untere (lower) lineare Fraktionaltransformation
$\text{LFT}_u(\cdot, \cdot)$	obere (upper) lineare Fraktionaltransformation
$\ln(\cdot)$	Logarithmus
$\mathcal{M}$	Menge aller blockdiagonalen rationalen Übertragungsfunktionen
$\mathcal{H}_\infty$	Hardy-Raum ( $\mathcal{H}_\infty \subset \mathcal{L}_\infty$ , zusätzlich kausal und stabil)
$\mathcal{RH}_\infty$	Hardy-Raum ( $\mathcal{RH}_\infty \subset \mathcal{H}_\infty$ , zusätzlich reell und rational)
$\text{Re}(\cdot)$	Realteil
$\text{Res}(\cdot)$	Residuum
$\mathcal{S}(\cdot, \cdot)$	Redheffer Star-Produkt
$\text{Spur}(\cdot)$	Summe der Diagonalelemente einer Matrix
$\sup(\cdot)$	Supremum

# Kurzfassung

In dieser Arbeit wird ein Verfahren zur Stabilitätsprüfung hybrider Systeme, bestehend aus einem zeitdiskreten Regler mit nicht konstanter Abtastzeit und einer kontinuierlichen Strecke, beschrieben. Das entwickelte Verfahren lässt es zu, einen garantiert stabilen Bereich für die Variation der Abtastzeit anzugeben. Da veränderliche Abtastzeiten äquivalent zu variierenden Laufzeiten sind, wie sie beispielsweise durch Bussysteme verursacht werden, kann das Verfahren auch auf dezentrale hybride Regelungen angewendet werden, bei denen Sensoren und Aktoren über Bussysteme mit der Regelung gekoppelt sind.

Die zur Herleitung des Verfahrens eingesetzten Methoden basieren auf dem Begriff der robusten Stabilität, die es ermöglicht, Stabilität für Systeme zu garantieren, die Unsicherheiten unterliegen. Daher wird die veränderliche Abtastzeit in einem ersten Schritt durch einen nichtlinearen Eingriff modelliert und anschließend in eine äquivalente Unsicherheit umgerechnet. Die Darstellung des mit Unsicherheiten behafteten Systems erfolgt als lineare Fraktionaltransformation. Anhand dieses Modells wird anschließend die Stabilität in Bezug auf eine Variation der Abtastzeit untersucht. Als Ergebnis des Verfahrens erhält man einen Bereich für die Abtastzeit, in dem Stabilität für das Gesamtsystem garantiert werden kann. Dabei ist es unerheblich, mit welcher Dynamik die Abtastzeit verändert wird.

Anschließend werden die theoretischen Ergebnisse anhand eines realen Systems verifiziert. Dazu wurde im Rahmen eines Industrieprojektes ein Versuchsstand mit vier auf Winkelgleichlauf zu regelnden Gleichstromantrieben aufgebaut, eine Regelung entworfen und diese in eine speicherprogrammierbare Steuerung implementiert. Die Kommunikation der Regelung mit den Stellgliedern und der Messwerterfassung erfolgte über ein Bussystem.

Nach der Modellierung des Gesamtsystems wird mit Hilfe des entwickelten Verfahrens der garantiert stabile Bereich für die Variationsbreite der Abtastzeit am Versuchsstand berechnet und die so bestimmten Stabilitätsgrenzen durch Messungen am Prüfstand verifiziert.

# Abstract

In this thesis, a method is presented which allows the specification of stability margins for hybrid control systems composed of a sampled data feedback controller with varying sampling time and a continuous linear system. The developed method provides lower and upper bounds for the sampling time and thus defining a range within guaranteed stability is ensured. The effect of varying sampling time and varying time delays of bus systems are equivalent. Therefore, the presented method can also be used for stability tests of decentralized controlled hybrid systems where the sensors and the actuators are linked to the controller by various bus systems.

The derivation of the method is based on concepts of robust stability, which allows stability tests for systems with uncertainties. In a first step the varying sampling time is modeled by a non-linear operation. Afterwards, the non-linearity is converted into an uncertainty. Now the system can be represented as a linear fractional transformation. Based on this model the stability of the time varying system can be analyzed with respect to variations of sampling time. As a result this method specifies a range for the sampling time within which stability of the varying system can be guaranteed, regardless of the dynamics of the variation.

Afterwards, the theoretical results are verified by measurements on a real system. A test bed was set up within the frame of an industrial project. The controllers were implemented in a programmable logic controller to ensure position synchronisation of four DC motors. All communications between the controller, actuators and sensors are established by bus systems.

After modeling the overall system, the presented method is used to determine the stability margins of the test bed concerning the sampling time. Finally, the calculated bounds are verified by measurements.



# 1 Einleitung

Durch die stetige Weiterentwicklung der Mikroelektronik im Bereich der Automatisierungstechnik und die Entwicklung von leistungsfähigen Mikrocontrollern und digitalen Signalprozessoren (DSP), haben sich diese bereits in vielen Bereichen etabliert. Aufgrund der immer weiter sinkenden Preise für diese Komponenten ist es gängig, Sensoren und Aktoren mit Intelligenz auszurüsten, um beispielsweise eine Datenvorverarbeitung bereits dort auszuführen. Da die Informationen digital in den Komponenten vorliegen, ist es sinnvoll, die Datenübertragung nicht mehr analog, sondern ebenfalls digital vorzunehmen. Hierzu werden verstärkt Feldbusse eingesetzt. Der Trend geht zu dezentralen Automatisierungssystemen, bei denen selbst die Regelung über Feldbusse mit den Sensoren und Aktoren verbunden ist.

Erfolgt die Regelung dezentral, werden die Messwerte der Sensoren sowie die Stellwerte für die Aktoren oftmals über Bussysteme übertragen. Viele Busse weisen variierende Übertragungszeiten auf. Die variierenden Verzögerungen bei der Datenübertragung wirken wie eine sich verändernde Abtastung im Regler und können als zeitvariante Abtastzeit für den Regler aufgefasst werden.

In der zeitdiskreten Regelungstechnik ist eine äquidistante Abtastung mit der Zeitkonstante  $T_0$  eine Grundvoraussetzung [1]. Der Regelalgorithmus muss daher zu exakt den Zeitpunkten  $t = \nu T_0$  mit  $\nu = 1, 2, \dots$  aufgerufen werden, aktualisierte Stellwerte berechnen und diese ausgeben. Diese Äquidistanz stellt, wie oben im Falle einer dezentralen Regelung über Feldbusse beschrieben, ein Problem dar.

Ein weiterer Faktor, der zu zeitabhängigen Abtastzeiten des Reglers führt, ist die zunehmende Mehrfachnutzung der Regelhardware aufgrund der immer höheren Leistungsfähigkeit der Mikroelektronik. Werden beispielsweise mehrere verschiedene Regler auf ein und denselben Rechner implementiert, oder wird der Rechner neben den Aufgaben der Regelung noch für andere hochprioritäre Aufgaben verwendet, kann häufig diese geforderte Äquidistanz nicht eingehalten werden. Befindet sich der Rechner zu einem Zeitpunkt  $t_1$  in einem Unterprogramm höherer Priorität der Laufzeit  $T_L$ , das von dem anstehenden Regleraufruf nicht unterbrochen werden darf, so kann folglich zu diesem Zeitpunkt kein neuer Stellwert vom Regler berechnet

und auf die Strecke ausgegeben werden. Dies wird erst dann wieder möglich, wenn das gerade bearbeitete Unterprogramm beendet ist. Daher kann es auch in solchen Fällen zu Verschiebungen der Aufrufzeitpunkte der Regleralgorithmen kommen. Da diese Verschiebungen bei der Berechnung der Stellgröße die Dynamik des Systems ändert, kann es zu unerwarteten Effekten, bis hin zur Instabilität des Systems kommen.

Um die Verschiebungen der Regleraufrufe zu verhindern, werden häufig leistungsfähigere Rechner verwendet als eigentlich für die Regelungsaufgaben nötig wären. Eine globale Aussage über die Stabilität lässt sich durch die Überdimensionierung allerdings trotz allem nicht treffen.

In dieser Arbeit wird der entgegengesetzte Weg gegangen und die Frage beantwortet: „Wie groß kann die Verschiebung der Abtastwerte eines Reglers sein, ohne dass es zu einer Instabilität des Systems kommt?“ Im Folgenden wird diese stochastische Verschiebung der Abtastzeitpunkte als Jittern bezeichnet.

Die Untersuchungen fokussieren sich auf stabile Systeme mit Tiefpasscharakter. Da die meisten technischen Systeme diese Eigenschaft besitzen, stellt dies keine große Beschränkung der Allgemeinheit dar. Die dazu eingesetzten Methoden basieren auf Verfahren der robusten Regelungstechnik und dabei speziell auf der robusten Stabilität. Diese Verfahren ermöglichen es, explizite Stabilitätsgrenzen auch bei Anwesenheit von Modellunsicherheiten anzugeben und somit die Stabilität des unsicheren Systems zu garantieren.

Es wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit darauf eingegangen, wie eine nicht konstante Abtastzeit in einem ersten Schritt durch eine Nichtlinearität dargestellt und darauf aufbauend in einem zweiten Schritt in eine Modellunsicherheit äquivalent umgerechnet werden kann. Anschließend wird die Stabilität für das unsichere System untersucht und zulässige Grenzen für die Variation der Abtastzeit bestimmt.

Zum Abschluss werden die theoretischen Ergebnisse anhand eines realen Systems verifiziert. Dazu wurde ein Versuchsstand mit vier Gleichstromantrieben aufgebaut und die entwickelte Regelung in einer Speicherprogrammierbaren Steuerung (SPS) der Firma Siemens vom Typ S7 implementiert. Die Kommunikation der Regelung mit den Stellgliedern und der Messwertfassung erfolgte über das Bussystem Profibus-DP.

## 1.1 Stand der Technik

In der klassischen Theorie für zeitdiskrete Regelsysteme werden die Abtastzyklen für den Regler als konstant angenommen [1]. Etwaige Totzeiten oder Übertragungszeiten werden zu



Null angenommen oder explizit als konstante Laufzeiten in der Modellierung berücksichtigt. Durch Vernetzung mehrerer digitaler Systeme und die zunehmende Auslagerung von Funktionen auf einzelne Funktionseinheiten gilt keine der beiden Annahmen mehr näherungsweise.

Bei den heutzutage in Mikrocontrollern, DSPs oder computerbasierten Recheneinheiten implementierten Reglern kommt es durch ungleichmäßige CPU-Auslastung, Interrupts, nicht synchrone CPU-Takte und Laufzeiten auf den Kommunikationwegen häufig zu zeitveränderlichen Abtastzeiten in der Regelung. Diese Verzögerungen beeinflussen die Regelqualität und können sogar zur Instabilität des geregelten Systems führen, wenn sie nicht berücksichtigt werden [81], [11], [57]. Im „Department of Automatic Control“ des schwedischen „Lund Institute of Technology“ wurde eigens zur Simulation verschiedenster Timingbedingungen in Regelkreisen die MATLAB Toolbox Jitterbug entwickelt [14].

In dem Maße, wie diese Trends in die Technik Einzug gehalten haben, gewinnt die zu Grunde liegende Theorie dieser Phänomene an Bedeutung. Dass diese trotz diverser, teils sehr umfangreicher Arbeiten noch nicht vollständig erschlossen wurde, lässt sich u. a. auch daran erkennen, dass die Deutschen Forschungsgemeinschaft kürzlich ein Schwerpunktprogramm für dieses Forschungsthema aufgelegt hat. Das Schwerpunktprogramm 1305 der DFG beschäftigt sich seit 2007 mit dem Thema „Regelungstheorie digital vernetzter dynamischer Systeme“ [47]. Für 2010 ist eine Verlängerung der Förderperiode geplant und wird gegenwärtig vorbereitet. Ziel des Schwerpunktprogramms ist es, eine geschlossene Regelungstheorie zu entwickeln, die es erlaubt – weg von der klassischen Forderung der Äquidistanz und Synchronität für zeitdiskrete Regelsysteme – die Flexibilität moderner Kommunikationsnetze im vollen Umfang zu berücksichtigen. Dabei wird einerseits besonderer Wert auf die ereignisgesteuerte Arbeitsweise und andererseits auf die sich selbstständig verändernde Netzstruktur für die Übertragungswege gelegt. Als ein Anwendungsbeispiel für die Ergebnisse wird beispielsweise die Kolonnenbildung im Straßenverkehr herangezogen [51].

Die Ansätze zur Berücksichtigung nicht konstanter Abtastraten bzw. veränderlicher Laufzeiten im Vorwärts- und/oder Rückwärtszweig eines Regelsystems lassen sich prinzipiell in drei Gruppen unterteilen:

1. Kompensation
2. Stochastik
3. Robustheit

Im Folgenden werden die einzelnen Kategorien kurz vorgestellt und diskutiert.

## Kompensation

In der ersten Gruppe wird der Ansatz der Kompensation verfolgt [66], [35]. In [85] wird gezeigt, wie bekannte Verzögerungen durch eine passende Wahl der Regelparameter kompensiert werden können. Dazu ist ein Zeitstempeln der Messwerte erforderlich. Der Ansatz resultiert in einem adaptiven Regler, der an die geänderten Bedingungen angepasst wird. Eine Möglichkeit für einen Reglerentwurf unter Zuhilfenahme von linearen Matrixungleichungen (LMI) wird prinzipiell in [6] dargestellt und in [76] anhand eines netzwerkbasierten Regelsystems nachgewiesen.

Eine weitere Möglichkeit bietet die Berücksichtigung der Abtastzeit in der für den Reglerentwurf herangezogenen Kostenfunktion. Dies führt zu einer online-Adaption der Regelparameter [13], [12].

In [29] wird gezeigt, dass Echtzeitsysteme in der Regel eine sich periodisch verändernde Abtastzeit aufweisen. Darüber hinaus wird ein Weg aufgezeigt, wie Stabilität für solche Systeme sichergestellt werden kann.

[46] verfolgt den Ansatz, die Eigenschaften des Systems und der Übertragungswege vorherzusagen und mittels prädiktiver Regelung das Gesamtsystem zu stabilisieren [83].

In [53] wird eine Methode vorgestellt, in der Stabilität für ein mit zeitlich veränderlichen Verzögerungen in den Übertragungswegen beaufschlagtes System garantiert werden kann. Das Verfahren basiert auf vorgebbaren Grenzen für die Ableitung der Verzögerungszeiten. Im Gegensatz zu normalen Verzögerungssystemen sind hier die Ein- und Ausgangsgrößen jeweils vor und nach der Verzögerung zugänglich, so dass anstelle der Originalausgangsgrößen von Regler und Strecke eine Linearkombination der zugehörigen Ein- und Ausgänge über das Netzwerk übertragen werden kann.

Allen oben aufgeführten Ansätzen ist gemein, dass ein hohes Maß an Kenntnis des Systems und der Übertragungswege erforderlich ist. Sind diese Informationen vorhanden, lässt sich Stabilität für den geschlossenen Kreis garantieren. Häufig sind diese Informationen aber nicht oder nur ungenügend bekannt. Diesem Fakt trägt die zweite Gruppe von Verfahren Rechnung, in der mit Hilfe stochastischer Ansätze versucht wird die Stabilität zu untersuchen.

## Stochastik

Schon in den frühen 80ern wurde in [68] umfassend und anschaulich der Umgang mit laufzeitbehafteten Regelsystemen mit asynchroner Abtastung vorgestellt. Darin wird ein für den

Reglerentwurf geeignetes Modell für digitale Systeme mit einer dominanten Abtastzeit, einer zusammenfassenden Reaktionszeit und einer Mittelwertübertragungsfunktion entwickelt und der Reglerentwurfsprozess anhand von Beispielen verdeutlicht.

In [45] wird ein stochastischer Ansatz vorgestellt, der Stabilität nicht absolut garantieren kann, jedoch mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit angibt. Es handelt sich dabei um einen Kompromiss zwischen konservativer Prozessführung mit hohen Kosten (Stabilität garantiert) und einer optimistischeren Prozessführung mit geringer Verletzung der Produktspezifikationen. Dabei werden die unsicheren Größen durch Erwartungswert, Varianz und Verteilungsfunktion berücksichtigt. Diese Größen liegen meist aus vorangegangenen Messungen vor oder können leicht bestimmt werden.

In [3] wird eine Methode zur Ermittlung einer empirischen Stabilität vorgestellt. Dazu erfolgten statistische Untersuchungen in einer Monte-Carlo-Simulation über die unsicheren Parameter. Ausgewertet werden hier die Eigenwerte der Systemmatrizen für das sich verändernde System.

Die Verfahren aus Gruppe 2 können aufgrund der statistischen Betrachtungsweisen Stabilität nicht garantieren. Ihr Einsatzgebiet liegt vor allem bei unkritischen Systemen. Sie erlauben es in der Regel sehr enge Grenzen anzugeben. Dennoch verbleibt der Nachteil, dass sich nur eine statistische Aussage über Stabilität treffen lässt. Absolute Stabilität kann mit diesen Verfahren jedoch nicht garantiert werden.

## Robustheit

Die dritte Gruppe bilden Verfahren, die auf die Robustheit des Gesamtsystems zielen und Aussagen über die Stabilität und Regelqualität auch bei Anwesenheit von Unsicherheiten gestatten [33], [36].

Eine Möglichkeit ist es, die Verzögerungen grundsätzlich als unsicher anzunehmen. In [30], [16] wird ein solcher Ansatz aufgezeigt. Dabei wird gefordert, dass die Abtast- und Verzögerungszeiten auf geschaltete Intervalle beschränkt angenommen werden können. Eine kontinuierliche Veränderung in einem größeren Bereich ist damit nicht möglich. Die intervallbeschränkten Unsicherheiten werden auf ein System mit geschalteter additiver Unsicherheit mit beschränkter Norm transformiert und mittels linearer Matrixungleichungen [6] auf Stabilität untersucht.

In [37] wurde eine graphische Methode zur Bestimmung der Stabilität für lineare Eingrößensysteme dargestellt, die eine Stabilitätsanalyse von Systemen mit veränderlichen Abtastzei-

ten mit Hilfe des Bodediagramms ermöglicht. Das Verfahren basiert auf dem „Small Gain Theorem“.

Die Behandlung von nichtlinearen Systemen wird in [80] dargestellt. Das Verfahren basiert auf der Maximierung der Stabilitätswahrscheinlichkeit durch einen genetischen Algorithmus. Der Ansatz ist nur offline durchführbar und daher für den laufenden Betrieb nicht anwendbar.

Eine Erweiterung der Methoden, weg von reinen Verzögerungsgliedern in Systemen hin zu formalen Kommunikationsprotokollen, ist in [79] dargestellt, so dass die Verfahren nicht nur im Bereich der Regelungstechnik, sondern auch in die Kommunikationstechnik Einzug gehalten haben.

## 1.2 Gliederung

Die vorliegende Arbeit konzentriert sich auf die Analyse der Systemstabilität bei Anwesenheit von veränderlichen Abtast- und Laufzeiten und beschreibt diese formal durch Unsicherheiten. Da für die Stabilitätsuntersuchungen Methoden der robusten Regelungstechnik eingesetzt werden, gliedert sich die Arbeit in den Bereich 3 der Robustheit ein. Sie stellt einen allgemein gültigen Ansatz zur Stabilitätsuntersuchung von linearen Systemen mit zeitlich veränderlichen Abtast- und Kommunikationszeiten vor, der Aussagen über die garantierte Stabilität ermöglicht und dabei nur sehr wenig Information über das zu regelnde System selbst bzw. die Veränderung der variablen Zeiten erfordert.

In Kapitel 2 werden die zum Verständnis der Vorgehensweise notwendigen Grundlagen der robusten Regelungstechnik erläutert.

Kapitel 3 stellt eine Methode zur Modellierung von Laufzeiten bzw. einer nicht äquidistanten Abtastung durch strukturierte Unsicherheiten dar und stellt das entwickelte Verfahren zur Stabilitätsuntersuchung anhand eines einfachen Beispiels vor. Dieses dient der besseren Verständlichkeit und schränkt die Anwendbarkeit der vorgestellten Vorgehensweise in keinsten Weise ein.

In Kapitel 4 wird der eingesetzte Versuchsstand zur Gleichlaufregelung von vier Antrieben bei Anwesenheit eines Jitterns vorgestellt.

Kapitel 5 zeigt das eingesetzte Regelkonzept. Dazu zählt auch die Modellbildung des Systems, der Reglerentwurf und die konkrete Parametrierung für den Prüfstand.

---

Anschließend werden in Kapitel 6 Untersuchungen zum Einfluss einer sich verändernden Abtastzeit vorgenommen und die Ergebnisse in Form von Simulationen und anhand realer Messwerte präsentiert. Dadurch gelingt es die Funktion der vorgestellten Algorithmen nachzuweisen.

Zusammenfassung und Ausblick schließen diese Arbeit ab.

## 2 Grundlagen

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die Grundlagen der robusten Regelungstechnik. Sie bilden die Basis für das im Rahmen dieser Arbeit zur Stabilitätsuntersuchung entwickelte Verfahren. Begonnen wird mit einer Definition des Begriffes der Normen, auf denen die gesamte robuste Regelungstechnik basiert. Des Weiteren wird der strukturierte singuläre Wert sowie der Begriff der strukturierten und der unstrukturierten Unsicherheiten eingeführt. Über die Definition der Stabilität wird dann die Definition der robusten Stabilität erörtert.

### 2.1 Zustandsraumdarstellung

In der klassischen Regelungstechnik ist es üblich, Systeme durch gebrochen rationale Funktionen im Frequenzbereich (Laplace-Bereich) als Übertragungsfunktionen zu beschreiben. Für Eingrößensysteme ist dies eine sehr gute und mathematisch einfach zu bewältigende Beschreibungsmöglichkeit. Anders sieht dies für Mehrgrößensysteme aus. Diese lassen sich einfacher durch Zustandsraumbeschreibungen darstellen und untersuchen [48].

In der robusten Regelungstechnik wird grundsätzlich nicht zwischen Ein- und Mehrgrößensystemen unterschieden. Aus diesem Grund werden im Rahmen dieser Arbeit Skalaren, Vektoren und Matrizen nicht explizit gekennzeichnet. Die Dimensionen ergeben sich aus dem Zusammenhang.

Im Frequenzbereich wird ein System durch gebrochen rationale Funktionen im Laplacebereich beschrieben. Dazu sind im Falle eines Mehrgrößensystems  $k \cdot l$  skalare Gleichungen erforderlich.  $k$  sei dabei die Anzahl der Eingänge und  $l$  die Anzahl der Ausgänge des Systems, siehe Bild 2.1.



Bild 2.1: System mit  $k$  Eingängen und  $l$  Ausgängen

Im Zustandsraum dagegen wird das Übertragungsverhalten des Systems durch eine matrixwertige Differentialgleichung im Zeitbereich beschrieben. Die Eingangs- bzw. Ausgangsgröße ist in diesem Fall ein Vektor mit der Dimension  $k \times 1$  bzw.  $l \times 1$ . An der Struktur des Systems nach außen ändert sich nichts.

Für die Definition sei das folgende Eingrößensystem gegeben. Es gelte ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $a_n = 1$ .

$$G(s) = \frac{\sum_{\nu=0}^m b_{\nu} s^{\nu}}{\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} s^{\nu}} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s + \dots + a_1 s + a_0} \quad (2.1)$$

Für kausale Systeme gilt stets  $n \geq m$ . Die Übertragungsfunktion lässt sich einfach in Regelungsnormalform als Blockschaltbild darstellen. Bild 2.2 zeigt beispielhaft  $G(s)$  mit einer Zählerordnung von  $m = 3$  und einer Nennerordnung von  $n = 3$ . Die Erweiterung auf Strecken höherer Ordnung ist trivial. Ein Mehrgrößensystem erhält man durch Parallelschalten weiterer  $a_i$  und  $b_i$  Koeffizienten, wobei  $u$  und  $y$  ein Vektor wird.

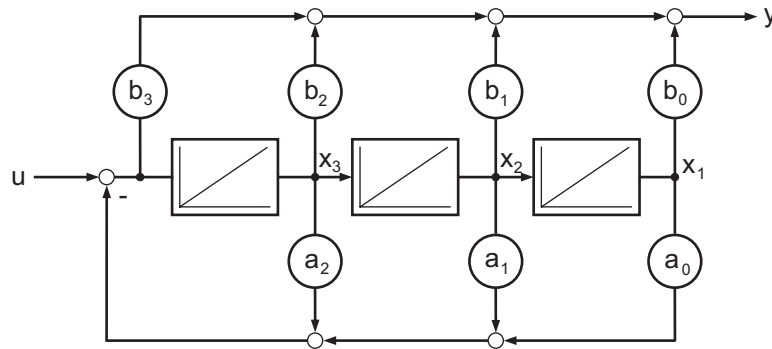


Bild 2.2: Darstellung in Regelungsnormalform

Angenommen die Ausgänge der Integratoren  $x_1$  bis  $x_3$  seien die Zustandsgrößen, dann ergibt sich der Zustandsvektor  $x$  zu

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Mit dieser Definition der Zustandsgrößen lassen sich zwei Matrix-Gleichungen aufstellen, die

das Übertragungsverhalten von  $G(s)$  im Zeitbereich vollständig beschreiben.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{Zustandsgleichung} \quad (2.3)$$

$$y = Cx + Du \quad \text{Ausgangsgleichung} \quad (2.4)$$

Die einzelnen Matrizen sind in Regelungsnormalform gegeben durch:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$C = \begin{bmatrix} b_0 - b_3 a_0 & b_1 - b_3 a_1 & b_2 - b_3 a_2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$D = \begin{bmatrix} b_3 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Das Übertragungsverhalten kann mittels dieser vier Matrizen

- $A$  : Systemmatrix  $(n \times n)$
- $B$  : Eingangsmatrix  $(n \times k)$
- $C$  : Ausgangsmatrix  $(l \times n)$
- $D$  : Durchgangsmatrix  $(l \times k)$

im Zustandsraum durch Bild 2.3 dargestellt werden, wobei der Eingang  $u$ , der Ausgang  $y$  und die Zustandsgrößen  $x$  im Mehrgrößenfall Vektoren sind.

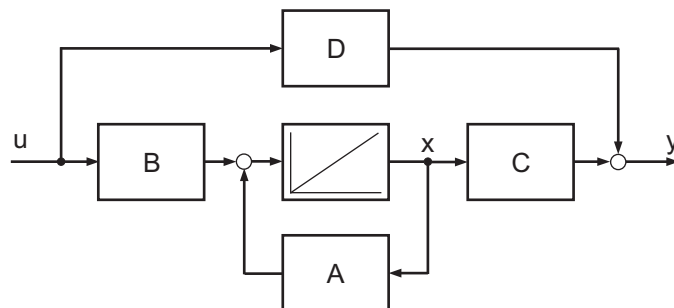


Bild 2.3: Darstellung von  $G(s)$  im Zustandsraum

Durch die Darstellung des Systems in Regelungsnormalform lässt sich jede beliebige Übertragungsfunktion in den Zustandsraum transformieren. Dabei sei angemerkt, dass diese Dar-



stellungsform keinesfalls eindeutig ist.

Um aus dem Zustandsraum zurück in den Frequenzbereich zu gelangen, gilt allgemein der Zusammenhang

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (2.9)$$

Im Weiteren werden folgende Formulierungen als einander gleichwertig angesehen bzw. als verkürzende Schreibweise verwendet.

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.10)$$

$$= (A, B, C, D) \quad (2.11)$$

$$= \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (2.12)$$

Für den Fall  $D = 0$ , d. h. das System ist streng begrenzt ( $G(\infty)=0$ ), wird die abkürzende Schreibweise  $G(s) = (A, B, C)$  eingeführt. Im Frequenzbereich bedeutet  $D = 0$ , dass das System Tiefpassverhalten aufweist und damit nicht sprunghaftig ist. Dies ist bei realen Systemen in der Regel der Fall.

## 2.2 Lineare Fraktionaltransformation

Im Zusammenhang mit der Zustandsraumdarstellung und der robusten Regelungstechnik werden abkürzende Schreibweisen für häufig auftretende Zusammenhänge verwendet. Eine davon ist die lineare Fraktionaltransformation (LFT) [87]. Sie stellt gemäß Bild 2.4 die Zusammenschaltung einer verallgemeinerten Strecke  $P$  mit einem weiteren Block  $K$  dar und gibt das Übertragungsverhalten des geschlossenen Kreises von  $z$  nach  $v$  wieder. Näheres zu der verallgemeinerten Strecke  $P$  folgt in Abschnitt 2.2.1.

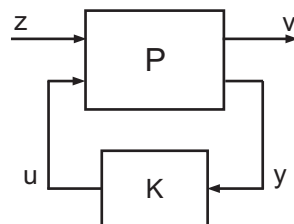


Bild 2.4: LFT aus verallgemeinerter Strecke  $P$  und Block  $K$

Wird  $P$  gemäß der vier möglichen Pfade von den Eingängen  $z$  und  $u$  zu den Ausgängen  $v$  und  $y$  zerlegt, so erhält man

$$\begin{pmatrix} v \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Diesen Zusammenhang stellt Bild 2.5 graphisch dar.

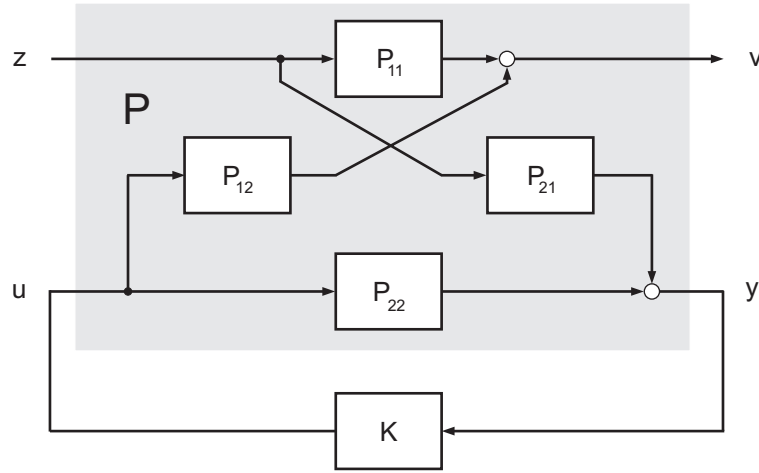


Bild 2.5: Darstellung des  $P$ -Blocks durch die einzelnen Übertragungsfunktionen

Der Block  $P_{11}$  gibt das Übertragungsverhalten von  $z$  nach  $v$  an. Für die übrigen drei Blöcke gilt entsprechendes.

Eine Umformung von Bild 2.5 ergibt Bild 2.6. Die Übertragungsfunktion  $T_{vz}$  der Eingänge  $z$  zu den Ausgängen  $v$  ist aus dieser Darstellung direkt ablesbar.

$$v = T_{vz} z = P_{11} z + P_{12} K (I - P_{22} K)^{-1} P_{21} z \quad (2.14)$$

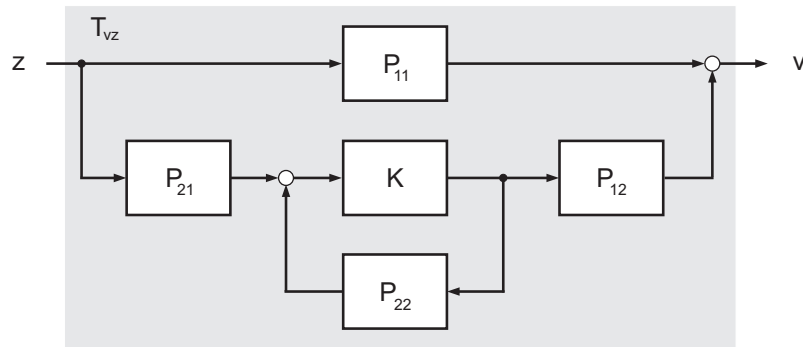


Bild 2.6: Aufgelöste Darstellung zur Berechnung von  $T_{zv}$

Die so erhaltene Übertragungsfunktion entspricht der oben erwähnten Darstellung einer linearen Fraktionaltransformation aus  $P$  und  $K$ .

$$T_{vz} = \text{LFT}(P, K) = P_{11} + P_{12} K (I - P_{22} K)^{-1} P_{21} \quad (2.15)$$

Im Folgenden wird die Schreibweise  $\text{LFT}(P, K)$  abkürzend für den rechten Teil der Glg. (2.15) verwendet.

Neben dieser Definition einer unteren (lower) LFT, auch  $\text{LFT}_l$  genannt, kann auch eine obere (upper)  $\text{LFT}_u$  angegeben werden. Der Unterschied besteht darin, dass in diesem Fall der Block  $K$  die oberen Ein- und Ausgänge der verallgemeinerten Strecke verbindet. Bild 2.7 verdeutlicht diesen Zusammenhang.

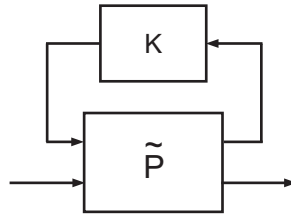


Bild 2.7: Darstellung einer oberen LFT

Die zugehörige Übertragungsfunktion ergibt sich äquivalent zu Bild 2.5 zu

$$\text{LFT}_u(\tilde{P}, K) = \text{LFT}_l(P, K) = \tilde{P}_{22} + \tilde{P}_{21} K (I - \tilde{P}_{11} K)^{-1} \tilde{P}_{12}, \quad (2.16)$$

wobei  $\tilde{P}$  durch Vertauschen der Zeilen und Spalten der  $P$ -Matrix entstanden ist.

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11} & \tilde{P}_{12} \\ \tilde{P}_{21} & \tilde{P}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{22} & P_{21} \\ P_{12} & P_{11} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Da die unteren LFTs häufiger verwendet werden, gilt für sie folgende Schreibweise.

$$\text{LFT}(\cdot, \cdot) \equiv \text{LFT}_l(\cdot, \cdot) \quad (2.18)$$

Wird im Verlaufe dieser Arbeit nicht ausdrücklich von oberen LFTs – gekennzeichnet durch den Index  $u$  – gesprochen, so sind immer untere gemeint.

Nützlich ist der Zusammenhang der Zustandsraummatrizen  $A, B, C, D$  und einer allgemeinen Übertragungsfunktion  $G(s)$ , ausgedrückt durch eine obere lineare Fraktionaltransformation

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \text{LFT}_u\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \frac{1}{s}I\right). \quad (2.19)$$

Bild 2.8 verifiziert diesen Zusammenhang.

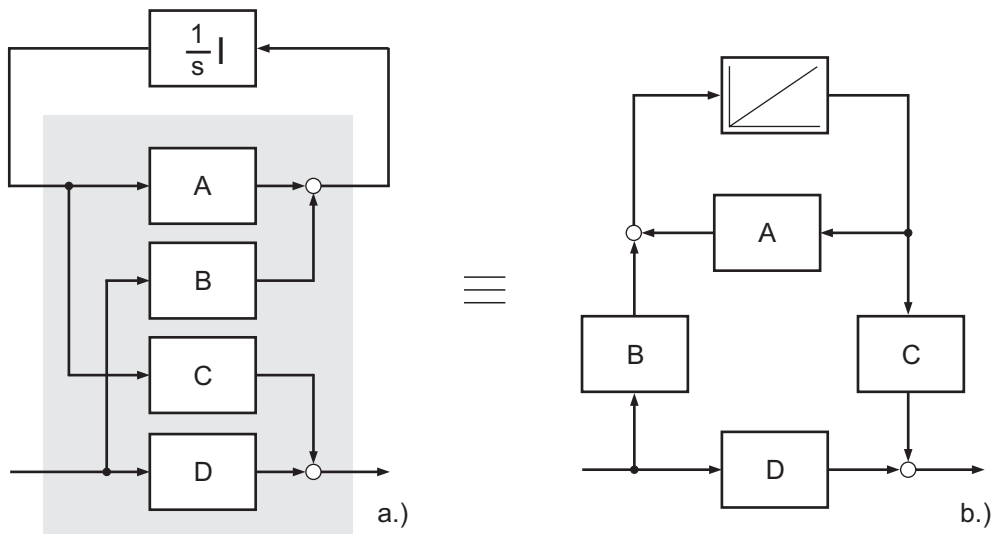


Bild 2.8: Beweis der Gleichheit von Zustandsraumdarstellung und LFT

Wird Glg. (2.16) auf Glg. (2.19) angewandt, so ergibt sich die Übertragungsfunktion  $G$  in der Form einer untern LFT.

$$G(s) = \text{LFT} \left( \begin{bmatrix} D & C \\ B & A \end{bmatrix}, \frac{1}{s} I \right) \quad (2.20)$$

Nachdem der Begriff der linearen Fraktionstransformation eingeführt ist, werden im nächsten Abschnitt einige nützliche Regeln zum Rechnen mit linearen Fraktionstransformationen vorgestellt.

### 2.2.1 Verallgemeinerte Streckendarstellung

In diesem Abschnitt wird ein genereller Rahmen zur Darstellung von unsicheren Systemen angegeben. Der Begriff der Unsicherheit im regelungstechnischen Sinne wird in Abschnitt 2.4 näher erläutert.

Durch die in Bild 2.9 dargestellte Struktur lässt sich jedes lineare, rationale im Zusammenhang mit der robusten Regelungstechnik zu untersuchende System darstellen.  $K$  repräsentiert den Regler,  $\Delta$  die Unsicherheiten des Systems und  $P$  die verallgemeinerte Strecke, die unter anderem auch das nominelle System  $G$ , Gewichtsfunktionen  $W_i$  und evtl. benötigte Anpassglieder beinhaltet.

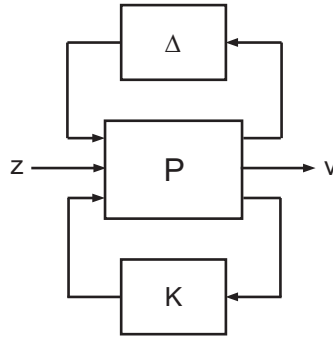


Bild 2.9: Standard-Struktur bestehend aus Regler  $K$ , verallgemeinerter Strecke  $P$  und Unsicherheit  $\Delta$

Die verallgemeinerte Strecke  $P$  hat passend zu den Dimensionen der Ein- und Ausgänge die Form

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) & P_{13}(s) \\ P_{12}(s) & P_{22}(s) & P_{23}(s) \\ P_{13}(s) & P_{23}(s) & P_{33}(s) \end{bmatrix}. \quad (2.21)$$

Mit Hilfe der eingeführten linearen Fraktionaltransformation lässt sich die Übertragungsfunktion von  $z$  nach  $v$  angeben.

$$T_{vz} = \text{LFT}_u(\text{LFT}(P, K), \Delta) \quad (2.22)$$

Durch Substitution der unteren LFT durch einen Block  $M$

$$M(s) = \text{LFT}(P, K) = \begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

ergibt sich folgendes Bild 2.10.

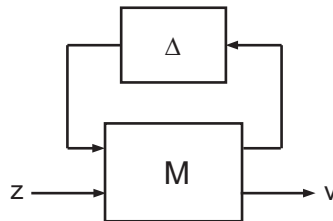


Bild 2.10: Standard-Struktur bestehend aus  $M$  und Unsicherheit  $\Delta$

Die Gesamtübertragungsfunktion kann angegeben werden als

$$T_{vz} = \text{LFT}_u(M, \Delta) = M_{22} + M_{21} \Delta (I - M_{11} \Delta)^{-1} M_{12}. \quad (2.24)$$

### 2.2.2 Satz zur Inversion von LFTs

Da beim praktischen Umgang mit linearen Fraktionaltransformationen der Form

$$T = \text{LFT}(N, Q) \quad (2.25)$$

häufig die Berechnung des unteren Elements  $Q$  bei bekanntem Übertragungsverhalten  $T$  und bekanntem Block  $N$  erforderlich ist, wird hier ein Satz zur Inversion von linearen Fraktionaltransformationen vorgestellt [86].

Eine notwendige Bedingung für die Existenz ist die Invertierbarkeit von  $N$ .

Die Übertragungsfunktion  $T$  des geschlossenen Kreises sei gemäß Bild 2.11a gegeben und

- sowohl  $T$ , als auch  $N$  seien begrenzt
- $\det(N(\infty)) \neq 0$
- $\det \left( N - \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) (\infty) \neq 0$
- und sowohl  $N_{12}$ , als auch  $N_{21}$  quadratisch und invertierbar,

dann existiert ein begrenztes  $Q$  für das gemäß Bild 2.11b)

$$Q = \text{LFT}_u(N^{-1}, T) \quad (2.26)$$

gilt.

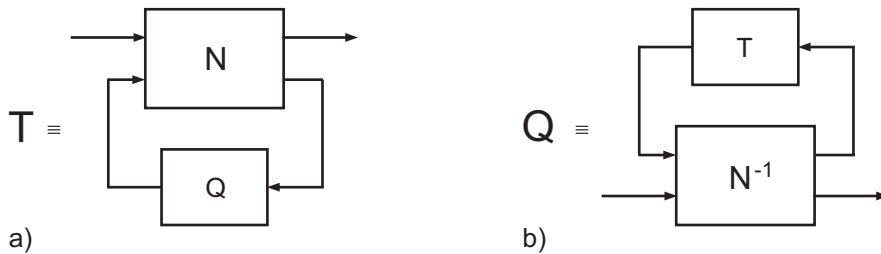


Bild 2.11: Auflösung des geschlossenen Kreises  $T$  nach  $Q$

Der Beweis dazu wurde von Zhou erbracht [86].

### 2.2.3 Redheffer-Star-Produkt

Die wichtigste Eigenschaft von linearen Fraktionaltransformationen ist, dass jegliche Art der Zusammenschaltung wieder eine lineare Fraktionaltransformation ergibt. Eine spezielle Zusammenschaltung ist in Bild 2.12 dargestellt und zeigt das Redheffer-Star-Produkt [63]. Die Dimensionen der einzelnen Elemente müssen dabei passend gewählt sein.

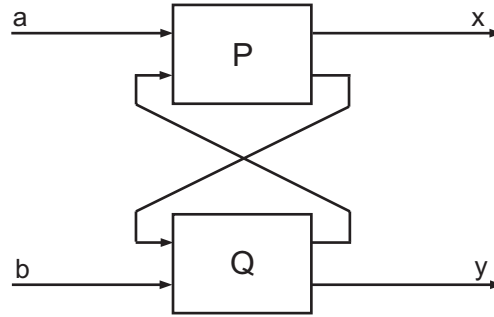


Bild 2.12: Redheffer Star Produkt

Seien beliebige lineare Übertragungsmatrizen  $P$  und  $Q$  gemäß Glg. (2.27) und Glg (2.28) definiert

$$P = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] \quad (2.27)$$

$$Q = \left[ \begin{array}{c|cc} a & b_1 & b_2 \\ \hline c_1 & d_{11} & d_{12} \\ c_2 & d_{21} & d_{22} \end{array} \right], \quad (2.28)$$

dann gilt für das Redheffer-Star-Produkt  $\mathcal{S}(\cdot, \cdot)$  nach Bild 2.12

$$\mathcal{S}(P, Q) := \left[ \begin{array}{c|cc} \tilde{A} & \tilde{B}_1 & \tilde{B}_2 \\ \hline \tilde{C}_1 & \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} \\ \tilde{C}_2 & \tilde{D}_{21} & \tilde{D}_{22} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array} \right], \quad (2.29)$$

mit

$$\tilde{A} = \left[ \begin{array}{cc} A + B_2 \tilde{R}^{-1} d_{11} C_2 & B_2 \tilde{R}^{-1} c_1 \\ b_1 \tilde{R}^{-1} C_2 & a + b_1 \tilde{R}^{-1} D_{22} c_1 \end{array} \right] \quad (2.30)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 \tilde{R}^{-1} d_{11} D_{21} & B_2 \tilde{R}^{-1} d_{12} \\ b_1 R^{-1} D_{21} & b_2 + b_1 R^{-1} D_{22} d_{12} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C_1 + D_{12} d_{11} R^{-1} C_2 & D_{12} \tilde{R}^{-1} c_1 \\ d_{21} R^{-1} C_2 & c_2 + d_{21} R^{-1} D_{22} c_1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} D_{11} + D_{12} d_{11} R^{-1} D_{21} & D_{12} \tilde{R}^{-1} d_{12} \\ d_{21} R^{-1} D_{21} & d_{22} + d_{21} R^{-1} D_{22} d_{12} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

und

$$R = I - D_{22} d_{11} \quad (2.34)$$

$$\tilde{R} = I - d_{11} D_{22} . \quad (2.35)$$

Mittels des Redheffer-Star-Produktes lässt sich systematisch die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises eines Systems berechnen, bei dem der Ausgang der Strecke  $G$  auf den Regler  $K$  gegengekoppelt wird.

$$T_{vz} = \mathcal{S}(G, -K) \quad (2.36)$$

Das Blockschaltbild 2.13 zeigt die zugrunde gelegte Struktur eines Standardregelkreises.

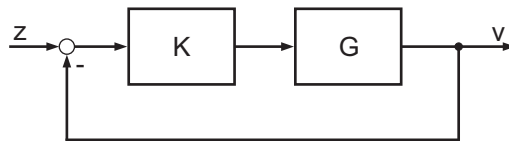


Bild 2.13: Konfiguration des geschlossenen Kreises

In Glg. (2.36) sei dabei ausdrücklich auf das negative Vorzeichen vor dem Regler  $K$  hingewiesen, das aufgrund der Gegenkopplung im Regelkreis 2.13 entsteht. In der regelungstechnischen Literatur, speziell in der amerikanischen, wird aus diesem Grund häufig ein „negierter“ Regler  $\tilde{K} = -K$  verwendet und eine positive Rückkopplung angenommen, um das negative Vorzeichen implizit zu berücksichtigen.



## 2.3 Normen

Nach der Einführung verschiedener Darstellungsformen für Systeme wird eine Möglichkeit benötigt, um Signale und Systeme systematisch bewerten zu können. Dies ermöglicht der synthetische Begriff der Normen [87, 58].

Normen werden durch doppelte Betragsstriche  $\| \cdot \|$  dargestellt. In der Regelungstechnik werden Normen verwendet, um ganze Klassen von Signalen oder Systemen gemeinsam beschreiben zu können.

Eine Norm im mathematischen Sinne muss den folgenden vier Eigenschaften genügen:

- 1.)  $\|f(x)\| \geq 0$   $\forall x \in [-\infty, \infty]$
- 2.)  $\|f(x)\| = 0$  nur wenn  $f(x) \equiv 0 \quad \forall x$
- 3.)  $\|a f(x)\| = |a| \|f\|$   $\forall a \in \mathbb{R}$
- 4.)  $\|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\|$  (Dreiecksungleichung)

Normen bilden Elemente, beispielsweise die Funktion  $f(x)$ , eines so genannten metrischen Raumes auf eine positive reelle Zahl ab. Diese Zahl ist ein Maß für die Größe dieses Elementes. Dabei handelt es sich bei Signalen um vektorwertige Funktionen der Zeit  $t$ , bei Übertragungsfunktionen dagegen um matrixwertige Funktionen in  $s$ .

Durch die Abbildung mittels einer Norm werden die Elemente charakterisierbar und vergleichbar. Es existieren viele Funktionen, die eine gleiche Norm aufweisen, was zur Folge hat, dass bei Bewertungen mittels Normen stets eine ganze Klasse von Signalen erfasst wird und nicht nur ein einzelner Verlauf. Die Aussagen mittels Normen erlangen somit eine viel allgemeinere Bedeutung als z. B. Simulationen. Alle Funktionen, die eine gleiche Norm aufweisen, werden im regelungstechnischen Sinne als einander ähnlich angesehen.

Die gesamte robuste Regelungstechnik baut auf dem Begriff der Norm auf. Daher wird im Folgenden näher darauf eingegangen.

### 2.3.1 Normen von Signalen

Regelungstechnische Signalverläufe, wie beispielsweise Stellgröße, Regelgröße und Sollwert, können durch die „ $p$ -Norm“ charakterisiert werden. Sie ist definiert als:

$$\|y(t)\|_p := \sqrt[p]{\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^p dt} \quad p \in \mathbb{N} \quad (2.37)$$

Nützlich sind nur solche Normen, mit denen eine physikalische Bedeutung verknüpft ist.

#### 1-Norm

Für  $p = 1$  stellt die 1-Norm

$$\|y(t)\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)| dt \quad (2.38)$$

diesen Bezug dar. Sie entspricht der Fläche unter dem Signal  $y(t)$ , siehe Bild 2.14.

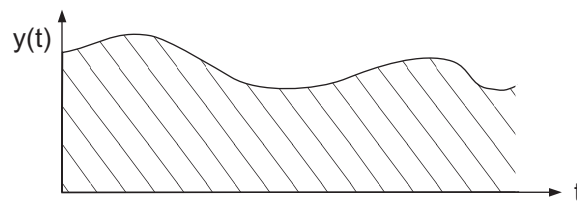


Bild 2.14: Physikalische Bedeutung der 1-Norm

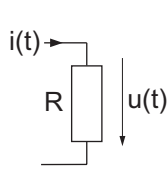
#### 2-Norm

$p = 2$  definiert die 2-Norm

$$\|y(t)\|_2 := \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt}, \quad (2.39)$$

die ein Maß für den Energieinhalt eines Signals ist. Dieses soll hier anhand eines einfachen Beispiels erläutert werden.

Betrachtet man einen vom Strom  $i(t)$  durchflossenen Widerstand  $R$ , so berechnet sich die Energie  $W$  zu:



$$\begin{aligned} u &= R i(t) \\ P &= u(t) i(t) = R i^2(t) \\ W &= \int_{-\infty}^{\infty} R i^2(t) dt = R \int_{-\infty}^{\infty} i^2(t) dt = R \|i(t)\|_2^2 \end{aligned}$$

Das Quadrat der 2-Norm des Stroms ist somit proportional der umgesetzten Energie.

$$\|i(t)\|_2^2 \sim \text{Energie von } i(t)$$

### $\infty$ -Norm

Die dritte, einen Zusammenhang zur Physik darstellende Norm, entsteht als Grenzübergang von  $p \rightarrow \infty$  und wird als  $\infty$ -Norm bezeichnet.

$$\|y(t)\|_{\infty} := \sup_t |y(t)| \quad (2.40)$$

Sie beschreibt das Maximum des Betrages der Funktion  $y(t)$  im Intervall  $t \in [-\infty, \infty]$ .

Bild 2.15 zeigt exemplarisch zwei Signale  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$  mit gleicher  $\infty$ -Norm.

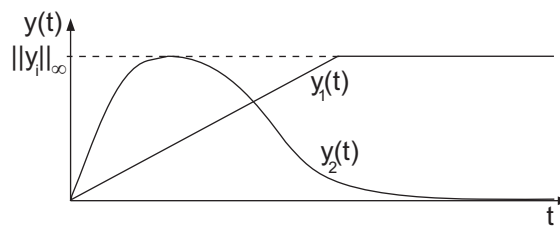


Bild 2.15: Signale mit gleicher  $\infty$ -Norm

### 2.3.2 Funktionenräume

Es ist nur sinnvoll, Funktionen zu betrachten, deren Norm endlich ist, da sie sonst nicht bewertet werden können. Signale, bei denen die  $p$ -Norm existiert, bezeichnet man als  $p$ -Norm-Signale oder auch als der Menge  $\mathcal{L}_p$  zugehörig.  $\mathcal{L}_p$  bildet den Lebesgue-Raum für den

das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^p dt \quad (2.41)$$

und damit die Norm konvergiert [23].

Die Menge  $\mathcal{L}_\infty$  beschreibt demnach den Raum aller Signale mit beschränkter  $\infty$ -Norm.

In der Regelungstechnik ist die Kausalität von Übertragungssystemen von großer Bedeutung, und sagt aus, dass ein System keine Reaktion zeigt, solange es keine Anregung gibt. Es gilt für den Ausgang eines kausalen Systems stets

$$y(t) = 0 \quad \text{für } t < 0.$$

Die Menge aller kausalen, stabilen Übertragungsfunktionen des Raumes  $\mathcal{L}_\infty$  wird als Hardy-Raum  $\mathcal{H}_\infty$  bezeichnet und ist somit ein Unterraum von  $\mathcal{L}_\infty$ .

$$\mathcal{H}_\infty \subset \mathcal{L}_\infty \quad (2.42)$$

Ist des Weiteren die Übertragungsfunktion eine rationale, reelle Funktion, so ist sie Element des Raumes  $\mathcal{RH}_\infty$ .

$$\mathcal{RH}_\infty \subset \mathcal{H}_\infty \quad (2.43)$$

Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass nur Funktionen verwendet werden, die Element des Raumes  $\mathcal{RH}_\infty$  sind und damit

- analytisch in der offenen rechten Halbebene,
- begrenzt in der geschlossenen rechten Halbebene,
- stabil und
- rational reell.

Die geschlossene bzw. offene rechte Halbebene ist dabei der Bereich, in dem für die komplexe Frequenzvariable  $s = \sigma + j\omega$  gilt, dass  $\sigma \geq 0$  bzw.  $\sigma > 0$ .

### 2.3.3 Normen von Systemen – eindimensionaler Fall

Ebenso wie Normen für Signale definiert werden können, ist es auch möglich, ganze Klassen von Systemen durch Normen zu bewerten.

In diesem Abschnitt wird der Begriff der Norm auf SISO-Übertragungsfunktionen erweitert. SISO steht dabei für „Single Input Single Output“ und beschreibt Eingrößensysteme mit nur einem Eingang und nur einem Ausgang.

Wie schon bei den Normen für Signale haben auch bei Systemen nur physikalisch relevante Normen eine Aussagekraft. Dies sind in diesem Fall die 2- und die  $\infty$ -Norm.

#### 2-Norm

Die 2-Norm einer Übertragungsfunktion ist definiert als

$$\|G\|_2 := \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega}. \quad (2.44)$$

Für stabile Übertragungsfunktionen  $G(s)$  gilt das Parseval'sche Theorem [10], nach dem Glg. (2.44) auch als

$$\|G\|_2 := \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} G^2(t) dt} \quad (2.45)$$

geschrieben werden kann, wobei  $G(t)$  die Impulsantwort des Systems beschreibt. Die Berechnung des Integrals in Glg. (2.44) lässt sich umgehen, wenn  $G(s)$  streng begrenzt ist. Man bezeichnet  $G(s)$  als streng begrenzt, wenn  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) \rightarrow 0$  gilt. Der Integrationsweg von  $-\infty \dots \infty$  kann dann virtuell im Unendlichen geschlossen werden, da  $G(j\infty) = 0$  gilt. Es entsteht somit ein Ringintegral, welches mit Hilfe des Residuensatzes [25]

$$\frac{1}{2\pi j} \oint_{\text{Gebiet}} F(z) dz = \sum_{\text{Gebiet}} \text{Res}\{F(z)\} \quad (2.46)$$

als Summe der Residuen des umschlossenen Gebietes berechnet werden kann.

$$\|G\|_2^2 = \sum_{\text{Re}\{\lambda_i\} < 0} \text{Res}\{G(-s)G(s)\} \quad (2.47)$$

### $\infty$ -Norm

Die  $\infty$ -Norm für Übertragungsfunktionen ist, wie schon bei den Signalnormen, als Maximum definiert:

$$\|G\|_{\infty} := \sup_{\omega} |G(j\omega)| \quad (2.48)$$

$\|G(j\omega)\|_{\infty}$  stellt dabei das Maximum des Betrags im Bodediagramm dar, kann aber auch als am weitesten vom Ursprung entfernter Punkt in der Ortskurve verstanden werden.

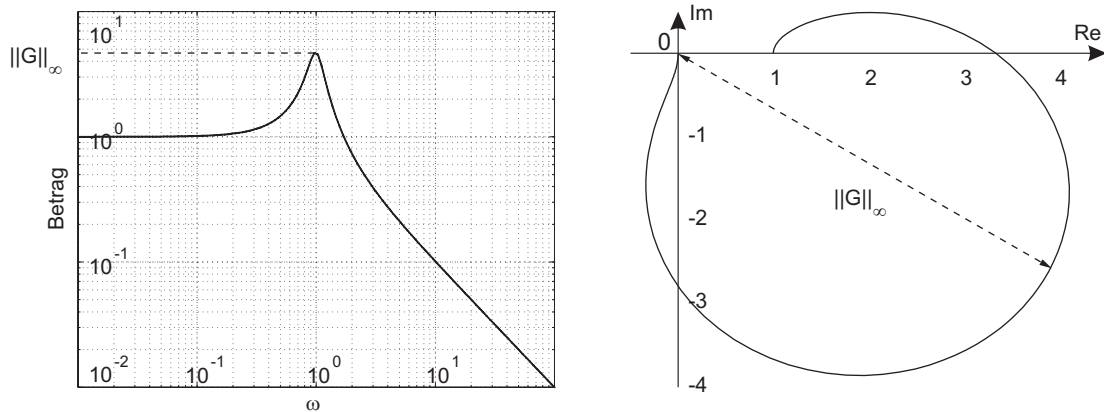


Bild 2.16: Bedeutung der  $\infty$ -Norm im Bodediagramm und in der Ortskurve

Zur Berechnung der  $\infty$ -Norm kann das Maximum der Funktion  $|G(j\omega)|$  auf konventionelle Weise durch ableiten bestimmt werden.

$$\frac{d|G(j\omega)|}{d\omega} \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.49)$$

### 2.3.4 Normen von Systemen – Mehrgrößenfall

Im Mehrgrößenfall wird die Übertragungsfunktion  $G(s)$  zu einer Übertragungsmatrix mit mehreren Eingängen und mehreren Ausgängen. Die Impulsantwort  $G(t)$  wird zu einer Matrix und enthält die Impulsantworten der einzelnen Übertragungsfunktionen von den Eingängen zu den Ausgängen.

## 2-Norm

Die Definition der 2-Norm bei Mehrgrößenstrecken lautet:

$$\|G\|_2 := \sqrt{\text{Spur} \left( \int_{-\infty}^{\infty} GG^T dt \right)} \quad (2.50)$$

$$:= \sqrt{\lambda_{\max} \left( \int_{-\infty}^{\infty} GG^T dt \right)} \quad (2.51)$$

$$:= \sqrt{d_{\max} \left( \int_{-\infty}^{\infty} GG^T dt \right)} \quad (2.52)$$

Dabei beschreibt  $\lambda_{\max}$  in Glg. (2.51) den maximalen Eigenwert von  $\int GG^T dt$  und  $d_{\max}$  in Glg. (2.52) das maximale Element der Hauptdiagonale.

## $\infty$ -Norm

Um bei Mehrgrößenstrecken die  $\infty$ -Norm zu bestimmen, wird eine Erweiterung des Betragsbegriffes bei Eingrößensystemen auf Matrizen erforderlich. Bei Mehrgrößensystemen (MIMO: Multiple Input Multiple Output) besteht das System aus mehreren einzelnen Übertragungsfunktionen. Es werden im Folgenden die singulären Werte  $\sigma_i$  statt des Betrags betrachtet. Sie charakterisieren das „Verstärkungsverhalten“ der Systemmatrix  $A$ . Für jede Matrix  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  existieren zwei orthogonale Matrizen  $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$  und  $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$  mit  $U^T U = I$ ,  $V^T V = I$ , sodass

$$U^T A V = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_p \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

mit  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_p \in \mathbb{R}$  und  $p = \min\{m, n\}$  gilt.

Diese Zerlegung wird als Singular Value Decomposition (SVD) bezeichnet [28]. Die  $\sigma_i$  sind dabei die singulären Werte der Matrix  $A$  und stellen die Faktoren dar, mit denen die Länge eines Vektors durch die Abbildung an  $A$  verändert wird. Die größte Veränderung in der Länge

erfährt ein Vektor  $x$  durch  $\sigma_1 = \sigma_{\max} = \bar{\sigma}$ .

$$\bar{\sigma}(A) = \max_x \frac{|Ax|}{|x|} \quad (2.54)$$

Der größte singuläre Wert  $\bar{\sigma}$  der Systemmatrix kann daher als Erweiterung des Betragsbegriffes bei Skalaren auf Matrizen aufgefasst werden. Analog zum Eingrößenfall kann damit die  $\infty$ -Norm definiert werden

$$\|G\|_{\infty} := \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)) , \quad (2.55)$$

und stellt den größten singulären Wert der Systemmatrix  $A$  dar.

### 2.3.5 Ein-/Ausgangsbeziehungen

Nach der Definition der Normen für Signale und für Systeme in den vorherigen Abschnitten können erstmals Aussagen über das Übertragungsverhalten von Systemen mittels Normen vorgenommen werden [20]. Dazu sei das in Bild 2.17 dargestellte System mit Eingang  $u$  und Ausgang  $y$  gegeben.



Bild 2.17: System mit Übertragungsfunktion  $G(s)$

1. Aussage mittels der  $\infty$ -Norm

$$\frac{\|y\|_2}{\|u\|_2} \leq \|G\|_{\infty} \quad (2.56)$$

Die  $\infty$ -Norm ist der größtmögliche Faktor, mit dem Energie vom Eingang  $\|u\|_2$  zum Ausgang  $\|y\|_2$  übertragen werden kann. Zur Veranschaulichung wird die Eingrößenstruktur aus Bild 2.18 angenommen.

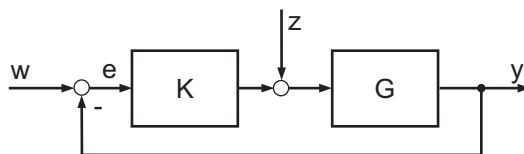


Bild 2.18: Geschlossener Kreis aus Regler  $K$  und Strecke  $G$



Dabei ergibt sich die Übertragungsfunktion von  $z \mapsto y$  mit  $w = 0$  (reine Störanregung) zu

$$\frac{y}{z} = \frac{G}{1 + GK} =: F.$$

Wird die  $\infty$ -Norm von  $F$  durch geschickte Wahl von  $K$  minimiert, so nimmt die von der Störung  $z$  zum Ausgang  $y$  übertragene Energie ein Minimum an. Anders ausgedrückt: Ist die Energie der Störung sowie die  $\infty$ -Norm der Übertragungsfunktion bekannt, kann mit Sicherheit gewährleistet werden, dass die Ausgangsenergie niemals den Wert  $\|G\|_\infty \cdot \|u\|_2$  überschreitet.

## 2. Aussage mittels der 2-Norm

$$\frac{\|y\|_\infty}{\|u\|_2} \leq \|G\|_2 \quad (2.57)$$

Glg. (2.57) besagt, dass die maximale Amplitude der Ausgangsgröße  $y(t)$  höchstens so groß wie das Produkt aus  $\|G\|_2 \|u\|_2$  sein kann. Durch Minimierung der 2-Norm von  $G$  kann die Ausgangsamplitude – hervorgerufen durch  $\|u\|_2$  – reduziert werden.

## 3. Aussage mittels der 1-Norm

$$\frac{\|y\|_\infty}{\|u\|_\infty} \leq \|G(t)\|_1 \quad (2.58)$$

Die 1-Norm beschreibt das Verhältnis des maximalen Eingangssignals zum maximalen Ausgangssignal.

Zusammenfassend führt die folgende Tabelle 2.1 die Systemverstärkungen von Systemen, ausgedrückt durch Normen, auf.

Tabelle 2.1: Systemverstärkungen

	$\ u\ _2$	$\ u\ _\infty$
$\ y\ _2$	$\ G\ _\infty$	$\infty$
$\ y\ _\infty$	$\ G\ _2$	$\ G(t)\ _1$

## 2.4 Unsicherheiten

Um Aussagen über die Modellabweichungen machen zu können, ist es in der Regelungstechnik üblich Unsicherheiten in Modelle einzufügen, um einerseits systematische Fehler bei der Modellbildung, aber auch zufällige Fehler wie beispielsweise Alterung, Temperatureinflüsse oder ähnliches mit zu berücksichtigen [88, 18, 19].

Nicht immer sind die zu untersuchenden Systeme bis in alle Einzelheiten bekannt. Oft ist dies auch gar nicht gewünscht, da bei sehr genauer Modellierung eines System die Ordnung des Modells und damit auch der Rechenaufwand stark ansteigt. Meist ist ein einfaches Modell des realen Systems besser für Entwurfs- oder Analysezwecke geeignet. Es muss selbstverständlich sichergestellt sein, dass das einfache Modell das Verhalten des realen Systems in hinreichendem Maße widerspiegeln kann.

Prinzipiell werden zwei Arten von Unsicherheiten unterschieden. Dies sind zum einen die unstrukturierten Unsicherheiten und zum anderen strukturierten Unsicherheiten deren Auswirkungen auf das System bekannt sind, wie beispielsweise Parameterunsicherheiten. Diese beiden Arten von Unsicherheiten werden in den nächsten Abschnitten näher erläutert und es wird gezeigt, wie diese modelliert und auf das Problem veränderlicher Abtastzeiten angewandt werden können.

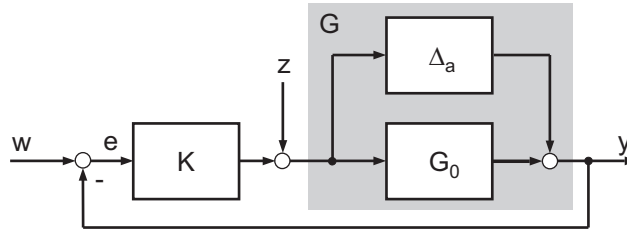
### 2.4.1 Unstrukturierte Unsicherheiten

Unstrukturierte Unsicherheiten beschreiben Abweichungen eines Modells von einem realen System [88]. Man bezeichnet sie als unstrukturiert, da keine strukturellen Abhängigkeiten in Bezug auf das System angegeben werden können. Unstrukturierte Unsicherheiten stellen den allgemeinsten Fall von Unsicherheiten dar und lassen sich als Art globale Unsicherheit verstehen.

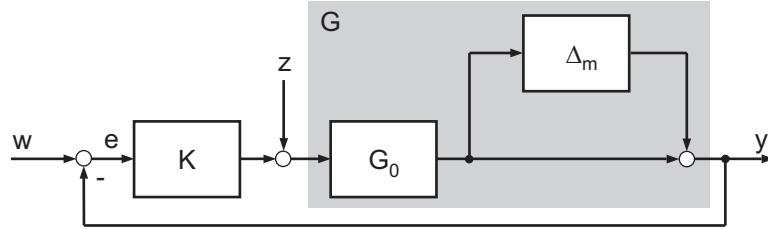
Sei  $G$  die Beschreibung eines realen Systems, so lässt sich dieses allgemein durch ein Prozessmodell  $G_0$ , auch als nominelles System bezeichnet, und eine additive Unsicherheit  $\Delta_a$  gemäß

$$G = G_0 + \Delta_a \tag{2.59}$$

darstellen. Bild 2.19 spiegelt diesen Zusammenhang wider.

Bild 2.19: Darstellung eines Systems mit additiver Unsicherheit  $\Delta_a$ 

In der Praxis ist es häufig günstiger, die Modellunsicherheit in einer multiplikativen Form anzugeben, da die Unsicherheit für hohe Systemverstärkungen meist auch größere Werte annimmt. Bild 2.20 stellt das dazugehörige Blockschaltbild dar.

Bild 2.20: Darstellung eines Systems mit multiplikativer Unsicherheit  $\Delta_m$ 

Eine entsprechende Modellierung lautet

$$G = G_0(I + \Delta_m), \quad (2.60)$$

wobei  $\Delta_m$  die multiplikative Unsicherheit des Systems darstellt.

Für die additive bzw. multiplikative Unsicherheit gilt der Zusammenhang

$$\Delta_a = G_0 \Delta_m. \quad (2.61)$$

Die Matrizen  $\Delta_a$  und  $\Delta_m$  sind dabei voll besetzt und weisen die Form

$$\Delta_{a|m} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \cdots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

auf, wobei  $\delta_{ij} \in \mathbb{C}$  Skalare sind.

In den Bildern 2.19 und 2.20 ist jeweils ein Regler  $K$  und ein Unsicherheitsblock  $\Delta_a$  bzw.  $\Delta_m$  zu sehen. Mit dieser Erkenntnis kann eine Standardform für unsichere geregelte Systeme definiert werden [88]. Bild 2.21 zeigt die sich ergebende Struktur.

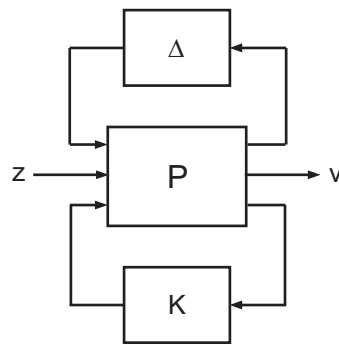


Bild 2.21: Standardstruktur eines mit Unsicherheiten behafteten Systems

Der Block  $P$  stellt dabei die verallgemeinerte Strecke dar und enthält das Streckenmodell  $G_0$  sowie eventuelle Gewichtsfunktionen  $W_i$  und Anpassglieder.

Beispielhaft für den Fall einer additiven Unsicherheit ergibt sich für  $P$  das Blockschaltbild 2.22.

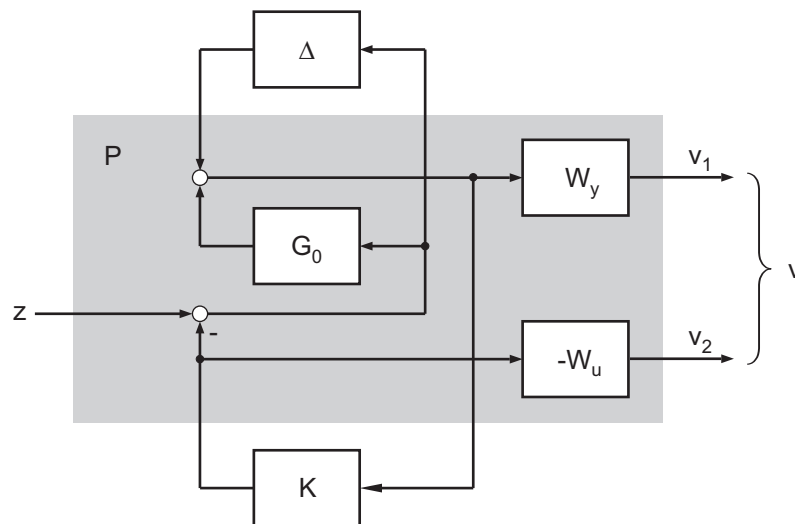


Bild 2.22: Beispielhafte Umformung des  $P$ -Blockes für additive Unsicherheiten

Zusätzlich zu Bild 2.19 wurden noch zwei Gewichtsfunktionen  $W_y$  und  $W_u$  eingeführt, um später die Möglichkeit zu haben, Forderungen an das System bzgl. Stabilität bzw. Regelqualität stellen zu können. Die Position der Gewichtsfunktionen ist in Bild 2.23 dargestellt.

$W_u$  bewertet dabei die Stellgröße, um diese begrenzen zu können. Die Funktion  $W_y$  gewichtet die Regelgröße, um Forderungen bzgl. Stabilität und Regelqualität an das System stellen zu können.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass unstrukturierte Unsicherheiten mit Hilfe der oben erläuterten Methoden die Möglichkeit bieten, nicht exakt bekannte physikalische Zu-

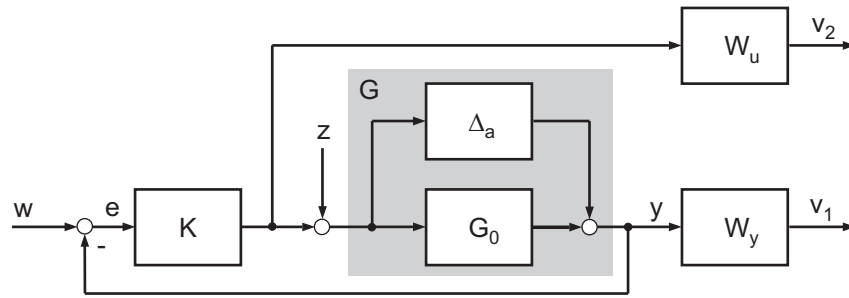


Bild 2.23: Eingeführte Gewichtsfunktionen

sammenhänge bei der Modellbildung (unmodeled dynamics) im späteren Reglerentwurf oder bei der Systemanalyse zu berücksichtigen. Die unstrukturierten Unsicherheiten stellen dabei den allgemeinsten Fall dar, da keinerlei Annahmen über die Art und Weise des Einflusses der Unsicherheiten auf das System gemacht wurden.

Im folgenden Abschnitt werden strukturierte Unsicherheiten eingeführt, die strukturelle Einschränkungen auf den Bereich der Unsicherheiten zulassen und damit eine Teilmenge der unstrukturierten Unsicherheiten darstellen.

### 2.4.2 Strukturierte Unsicherheiten

Strukturierte Unsicherheiten sind Unsicherheiten, die einem strukturellen Zwang unterliegen [18, 19, 88]. Im Gegensatz zu den unstrukturierten Unsicherheiten ist der durch  $\Delta$  aufgespannte Raum durch physikalische Gegebenheiten weiter eingeschränkt. Am deutlichsten wird dies bei Parameterunsicherheiten.

Parameterunsicherheiten sind meist rein reell. Ist beispielsweise bei einer Maschine eine Dämpfung bekannt, so kann im Allgemeinen auch eine Streuung dieses Wertes angegeben werden. Es gilt beispielsweise, dass die Dämpfung einem nominellen Wert  $d_0$  plusminus einem Bereich von 10% entspricht.

$$d = d_0 \pm 10\% \quad (2.63)$$

Dies kann mathematisch durch folgende Gleichung, ausgedrückt mit der Unsicherheit  $\delta$ , beschrieben werden.

$$d = d_0 (1 + 0,1 \delta) \quad \text{mit} \quad |\delta| \leq 1, \quad \delta \in \mathbb{R} \quad (2.64)$$

Im Falle mehrerer unsicherer Parameter erhält man entsprechend  $\delta_1$  bis  $\delta_n$  aus denen die

Unsicherheitsmatrix  $\Delta$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \delta_n \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

gebildet werden kann.

Die Struktur des unsicheren Systems entspricht exakt der im vorherigen Abschnitt eingeführten Struktur für unstrukturierte Unsicherheiten (Bild 2.21). Der Unterschied besteht darin, dass die Unsicherheitsmatrizen  $\Delta$  im unstrukturieren Fall beliebig (vgl. Glg. (2.62)), im strukturierten Fall dagegen nur eingeschränkt besetzt sind. Dies ist deutlich in Glg. (2.65) zu erkennen, da dort nur Elemente auf der Hauptdiagonalen vorhanden sind. Im Falle von Parameterunsicherheiten gilt ebenfalls  $\delta_i \in \mathbb{R}$  im Gegensatz zu  $\delta_{ij} \in \mathbb{C}$  bei den unstrukturierten Unsicherheiten.

Nach der mathematischen Beschreibung von Unsicherheiten können diese zur Untersuchung der Stabilität eines mit Unsicherheiten behafteten Systems herangezogen werden.

## 2.5 Robuste Stabilität

Im Rahmen dieses Abschnitts wird die Stabilität von Systemen bei Anwesenheit von strukturierten und/oder unstrukturierten Unsicherheiten untersucht. Ausgehend von der in Abschnitt 2.2.1 eingeführten Standard-Struktur wird ein Stabilitätskriterium für mit Unsicherheiten behaftete Systeme angegeben. Im Folgenden werden kurz die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Begriffe für Stabilität und Regelqualität definiert.

Bild 2.24 zeigt im linken Teil die allgemeine Struktur des zu untersuchenden Systems aus Unsicherheit  $\Delta$ , verallgemeinerter Strecke  $P$  und Regler  $K$ . Der rechte Teil zeigt eine Zusammenfassung von  $P$  und  $K$  in Form einer linearen Fraktionaltransformation zu einem Block  $M$ .

Sei  $\Pi$  die Menge aller durch die Unsicherheiten  $\Delta$  hervorgerufenen Modelle und  $P \in \Pi$  das nominelle System, dann erreicht der geschlossene Kreis

- nominelle Stabilität, wenn  $K$  das nominelle System  $P$  intern stabilisiert ( $\Delta = 0$ ),
- robuste Stabilität, wenn  $K$  jedes Modell aus  $\Pi$  intern stabilisiert,

- nominelle Regelqualität, wenn die geforderte Regelqualität für das nominelle System  $P$  erreicht wird ( $\Delta = 0$ ) und
- robuste Regelqualität, wenn die geforderte Regelqualität für jedes Modell aus  $\Pi$  erreicht wird.

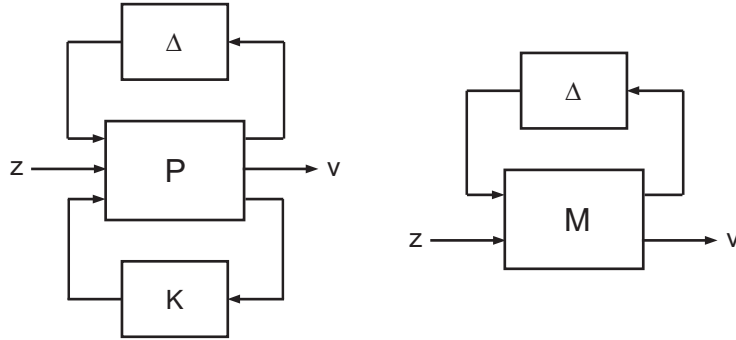


Bild 2.24: Zugrunde gelegte Struktur zur Stabilitätsuntersuchung

### 2.5.1 Small-Gain-Theorem – unstrukturierte Unsicherheiten

Unter Zuhilfenahme des Small-Gain-Theorems kann robuste Stabilität bei Systemen mit unstrukturierten Unsicherheiten untersucht werden [87]. Das Bild 2.25 zeigt die dafür zugrunde gelegte Struktur.

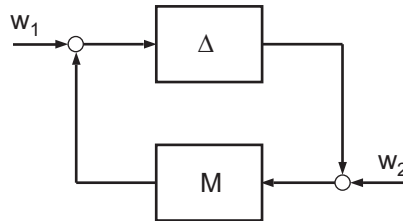


Bild 2.25: Struktur Small Gain Theorem

Sei  $M \in \mathcal{RH}_\infty$  und  $\gamma > 0$ , dann gilt, dass das System gemäß Bild 2.25 intern stabil ist für alle  $\Delta \in \mathcal{RH}_\infty$  mit

- $\|\Delta\|_\infty \leq 1/\gamma$  dann und nur dann, wenn  $\|M(s)\|_\infty < \gamma$ ;
  - $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$  dann und nur dann, wenn  $\|M(s)\|_\infty \leq \gamma$ .
- (2.66)

Auf einen Beweis sei hier verzichtet und auf die einschlägige Literatur verwiesen [87].

Wendet man dieses Theorem zusammen mit den Ausführungen über unstrukturierte Unsicherheiten an und sorgt durch geeignete Wahl von Gewichtsfunktionen (Skalierung) dafür,

dass die  $\infty$ -Norm der Unsicherheiten kleiner als 1 ist

$$\|\Delta\|_{\infty} < 1, \quad (2.67)$$

so besagt das Small Gain Theorem, dass das unsichere System dann und nur dann stabil ist, wenn die  $\infty$ -Norm von  $M \leq 1$  ist. Zur Stabilitätsuntersuchung muss in einem ersten Schritt die Übertragungsfunktion  $M$  vom Ausgang der Unsicherheit zum Eingang der Unsicherheit berechnet und anschließend deren  $\infty$ -Norm bestimmt werden. Ist diese kleiner als 1, so ist das System auch bei Anwesenheit der Unsicherheiten garantiert stabil.

### 2.5.2 Strukturierter singulärer Wert – strukturierte Unsicherheiten

Im Gegensatz zu unstrukturierten Unsicherheiten, muss die Stabilitätsprüfung basierend auf dem Small Gain Theorem bei strukturierten Unsicherheiten erweitert werden, da die Unsicherheiten strukturellen Einschränkungen (s. Glg. (2.70)) unterliegen. Dazu wird als Erweiterung der  $\infty$ -Norm (des größten singulären Wertes) bei unstrukturierten Unsicherheiten, der strukturierte singuläre Wert (SSV) für strukturierte Unsicherheiten eingeführt [17, 61, 62].

Galt bislang

$$\bar{\sigma}(M(s)) = \frac{1}{\min \{ \bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - M(s) \Delta) = 0, \quad \Delta \text{ unstrukturiert} \}} \quad (2.68)$$

so muss bei strukturierten Unsicherheiten das Konzept des singulären Wertes verallgemeinert werden.

$$\mu_{\Delta}(M(s)) = \frac{1}{\min \{ \bar{\sigma}(\Delta) : \det(I - M(s) \Delta) = 0, \quad \Delta \text{ strukturiert} \}} \quad (2.69)$$

Die Größe  $\mu_{\Delta}$  stellt dabei den größten strukturierten singulären Wert von  $M(s)$  bezogen auf die strukturierte komplexe Unsicherheit  $\Delta$  dar.

Ähnlich zu dem Small Gain Theorem lässt sich ein Theorem zur Überprüfung der robusten Stabilität für Systeme mit strukturierten (Parameter-)Unsicherheiten angeben.

Dazu sind als erstes zwei Mengen zu definieren.  $\Delta \subset \mathbb{C}^{n \times n}$  sei die Menge aller Blockdiagonalmatrizen, die die Menge der strukturierten Unsicherheiten widerspiegelt.

$$\Delta = \{ \text{diag} [\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_s I_{r_s}, \Delta_1, \dots, \Delta_F] : \delta_i \in \mathbb{C}, \Delta_j \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j} \} \quad (2.70)$$



Dabei sind die  $\delta_i$  Skalare mit der Vielfachheit  $r_i$  und die  $\Delta_j$  Blockmatrizen. Es gilt

$$\sum_{i=1}^S r_i + \sum_{j=1}^F m_j = n. \quad (2.71)$$

Des Weiteren sei  $\mathcal{M}(\Delta)$  die Menge aller blockdiagonalen rationalen Übertragungsfunktionen

$$\mathcal{M}(\Delta) := \{ \Delta(\cdot) \in \mathcal{RH}_\infty : \Delta(s_o) \in \Delta \quad \forall \quad s_o \in \bar{\mathbb{C}}_+ \}. \quad (2.72)$$

Unter diesen Voraussetzungen kann die Definition des strukturierten singulären Wertes auch als

$$\mu_\Delta(M) = \frac{1}{\min \{ \bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \Delta, \det(I - M \Delta) = 0 \}} \quad (2.73)$$

angegeben werden. Als Äquivalent zum Small-Gain-Theorem (2.66) für unstrukturierte Unsicherheiten, kann folgender Zusammenhang für strukturierte Unsicherheiten angegeben werden:

Sei  $\gamma > 0$ , dann gilt, dass das System gemäß Bild 2.25 intern stabil für alle  $\Delta \in \mathcal{M}(\Delta)$  mit  $\|\Delta\|_\infty < 1/\gamma$  ist, dann und nur dann, wenn

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_\Delta(G(j\omega)) \leq \gamma \quad (2.74)$$

gilt.

Diese Aussage ist eine Spezialisierung des Small-Gain-Theorems auf strukturierte Unsicherheiten. Sie berücksichtigt die strukturellen Einschränkungen der Unsicherheiten und gibt damit eine Untermenge an. Es gilt stets

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_\Delta(G(j\omega)) \leq \|G(j\omega)\|_\infty. \quad (2.75)$$

Der strukturierte singuläre Wert  $\mu_\Delta$  kann nach heutigem Stand der Wissenschaft nicht exakt und auch nicht direkt berechnet werden. Es existieren allerdings obere und untere Grenzen, die explizit angegeben werden können. Je näher diese Grenzen beieinander liegen, desto genauer ist  $\mu_\Delta$  bestimmt. Es gelten aus der Definition von  $\mu_\Delta$  nach Glg. (2.69) unmittelbar die Grenzen

$$\rho(M) \leq \mu_\Delta(M) \leq \bar{\sigma}(M), \quad (2.76)$$

wobei  $\rho(M)$  der Spektralradius von  $M$ , also der Betrag des größten Eigenwerts von  $M$

$$\rho(M) = |\lambda_{\max}(M)| \quad (2.77)$$

und  $\bar{\sigma}(M)$  der größte singuläre Wert von  $M$  ist. Da diese Grenzen in der Praxis beliebig weit voneinander entfernt sein können, hat Young [84] einen Algorithmus beschrieben, mit dem diese Grenzen enger gefasst werden können, sodass gilt

$$\max_{Q \in \mathbf{Q}} \rho(QM) \leq \mu_{\Delta}(M) \leq \inf_{D \in \mathbf{D}} \bar{\sigma}(DM D^{-1}), \quad (2.78)$$

wobei die Mengen  $\mathbf{Q}$  und  $\mathbf{D}$  wie folgt definiert sind

$$\mathbf{Q} = \{Q \in \Delta : Q^*Q = I_n\} \quad (2.79)$$

$$\mathbf{D} = \left\{ \begin{array}{l} \text{diag} [D_1, \dots, D_S, d_1 I_{m_1}, \dots, d_{F-1} I_{m_{F-1}}, I_{m_F}] : \\ D_i \in \mathbb{C}^{r_i \times r_i}, D_i = D_i^* > 0, d_j \in \mathbb{R}, d_j > 0 \end{array} \right\} \quad (2.80)$$

und dafür sorgen, dass folgende Operationen invariant bezüglich  $\mu_{\Delta}(M)$  sind

$$\mu_{\Delta}(M) = \mu_{\Delta}(MQ) = \mu_{\Delta}(QM) = \mu_{\Delta}(DM D^{-1}). \quad (2.81)$$

Für die praktische Anwendung anzumerken ist, dass eine Annahme von rein reellen strukturierten Unsicherheiten zu numerischen Problemen bei der Berechnung der Schranken führen kann. Es ist daher ratsam, auch bei physikalisch rein reellen Unsicherheiten, wie sie beispielsweise bei Parameterunsicherheiten auftreten, einen kleinen komplexen Anteil zuzulassen. Dies erhöht einerseits die numerische Robustheit bei der Berechnung, schränkt aber andererseits die Aussagekraft der Lösung nicht ein, da der erweiterte Bereich für die Unsicherheiten durch den komplexen Anteil stets größer als der wirklich vorliegende Bereich ist. Aussagen über die Systemstabilität behalten damit ihre Gültigkeit. Der Ansatz komplexer Unsicherheiten ist konservativer als die Annahme rein reeller Unsicherheiten anzusehen.

Im Gegensatz zur Stabilitätsuntersuchung mit unstrukturierten Unsicherheiten ist im Falle von strukturierten Unsicherheiten der größte strukturierte singuläre Wert anstelle des größten singulären Wertes zu berechnen. Die prinzipielle Vorgehensweise ist in beiden Fällen bis auf diesen Unterschied jedoch identisch.

## 3 Ansatz zur Stabilitätsanalyse hybrider Systeme

Nachdem im vorherigen Kapitel einige Grundlagen zur robusten Regelungstechnik erläutert wurden, werden diese nun zur Stabilitätsuntersuchung zeitvarianter hybrider<sup>1</sup> Systeme angewandt.

Prinzipiell unterteilt sich das Vorgehen bei diesem Verfahren in 5 Schritte:

1. Modellierung des Systems
  - zeitdiskreter Teil: Beschreibung des Reglers im zeitdiskreten  $z$ -Bereich mit nomineller Abtastzeit  $T_0$
  - kontinuierlicher Teil: Beschreibung der Strecke im Frequenzbereich  $s$
2. Transformation des zeitdiskreten Teils in den Frequenzbereich unter Zuhilfenahme der bilinearen Transformation
3. Modellierung der veränderlichen Abtastung durch strukturierte Unsicherheiten als lineare Fraktionaltransformationen
4. Berücksichtigung des Fehlers durch Anwendung der bilinearen Transformation als Näherung für die  $z$ -Transformation durch unstrukturierte Unsicherheiten
5. Stabilitätsuntersuchung des Systems mit Methoden der robusten Stabilität.

### 3.1 Modellierung

Um die Vorgehensweise besser verständlich zu machen, wird sie anhand eines einfachen Beispiels für ein Eingrößensystem vorgeführt. Eine Verallgemeinerung auf beliebige lineare,

---

<sup>1</sup>Hybride Systeme besitzen sowohl einen zeitdiskreten, als auch einen kontinuierlichen Teil.

rationale MIMO-Systeme, die Element des Raumes  $\mathcal{RH}_\infty$  sind, ist trivial, da alle benötigten Operationen im vorangehenden Kapitel für den allgemeinen MIMO-Fall definiert wurden.

Bild 3.1 zeigt das der Demonstration zugrunde gelegte System, bestehend aus einem zeitdiskreten PID-Regler  $K(z)$  und einer kontinuierlichen Strecke  $G(s)$ .

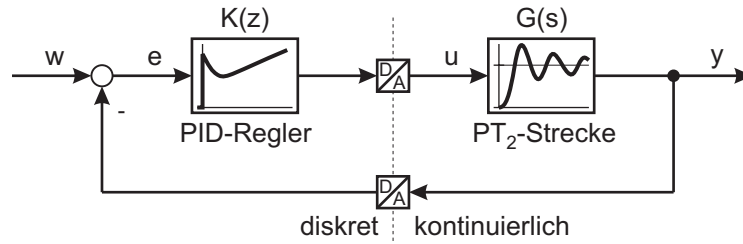


Bild 3.1: Blockschaltbild des untersuchten Systems

Die Strecke sei beispielhaft ein schwach gedämpfter Tiefpass 2. Ordnung mit der Kreisfrequenz  $\omega_0$  und der Dämpfung  $D$ .

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + \frac{2D}{\omega_0}s + 1} \quad (3.1)$$

Für diese Strecke wurde ein quasikontinuierlicher zeitdiskreter Regler  $K(z)$  in Parallelform<sup>2</sup> mit einer nominellen Abtastzeit  $T_0$ , den Parametern  $k_1$  bis  $k_3$  und der parasitären Verzögerung  $T_w$  entworfen. Die Auslegung erfolgte für eine Dämpfung des geschlossenen Kreises von  $D = 1/\sqrt{2}$  als Kompensationsregler für das konjugiert komplexe Polpaar der Strecke.

Der quasikontinuierliche zeitdiskrete Regler  $K(z)$  ergibt sich bei Wahl einer nominellen Abtastzeit von  $T_0 = 0,1$  durch exakte  $z$ -Transformation zu

$$K(z) = k_1 \frac{z-1}{z-z_1} + k_2 + \frac{T_0 k_3}{z-1}, \quad (3.2)$$

wobei  $z_1 = e^{(-\frac{T_0}{T_w})}$  gilt.

Damit ist ein zeitdiskreter Regler mit nomineller Abtastzeit  $T_0$  für die kontinuierliche Strecke entworfen.

Die folgenden beiden Bilder zeigen zum einen die Sprungantwort der unregelten Strecke (Bild 3.2) und zum anderen die des geschlossenen Kreises (Bild 3.3).

<sup>2</sup>Nur in Parallelform können komplexe Pole kompensiert werden.

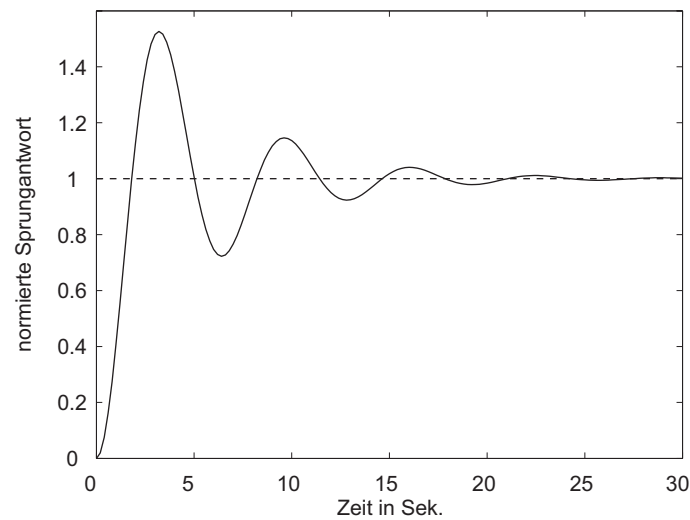
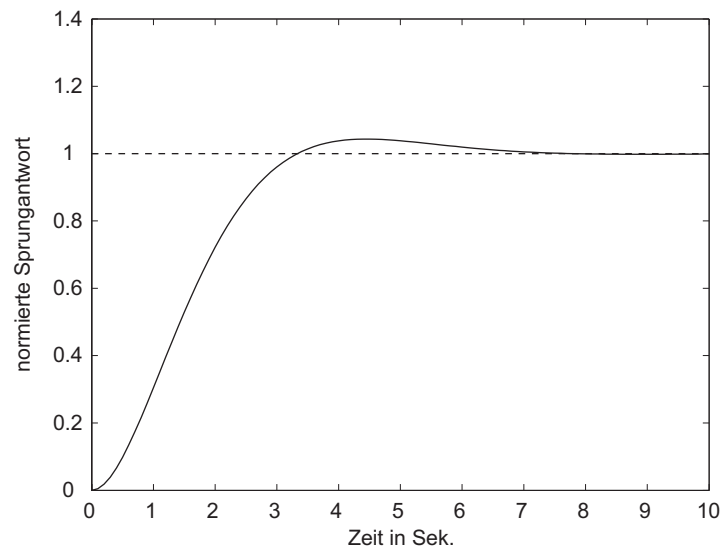
Bild 3.2: Sprungantwort der unregelten schwingungsfähigen Strecke mit Dämpfung  $D$ 

Bild 3.3: Sprungantwort des Geschlossenen Kreises aus Regler und Strecke

## 3.2 Transformation des Reglers nach $s$

Im nächsten Schritt wird der nominelle zeitdiskrete Regler gemäß Glg. (3.2) (fester Parametersatz) mittels der bilinearen Transformation für beliebige Abtastzeiten  $T$  in den Frequenzbereich transformiert. Dabei entsteht, bedingt durch die Näherung der  $z$ -Transformation durch die bilineare Transformation, ein kleiner Fehler. Wie dieser Fehler bei der folgenden Stabilitätsuntersuchung berücksichtigt werden kann, ist in Abschnitt 3.4 dargestellt.

$$\text{bilineare Transformation} \quad z \rightarrow s \quad z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} \quad (3.3)$$

Durch die Substitution nach Glg. (3.3) ergibt sich der für die späteren Stabilitätsuntersuchungen verwendete kontinuierliche Regler

$$K(s, T) = V \frac{a T s}{a T s + 1} + c + d \frac{1}{T s}, \quad (3.4)$$

wobei die Konstanten  $V$ ,  $a$ ,  $c$  und  $d$  durch

$$\begin{aligned} V &= \frac{2 k_1}{z_1 + 1} \\ a &= \frac{1}{2} \frac{z_1 + 1}{1 - z_1} \\ c &= k_2 - \frac{T_0 k_3}{2} \\ d &= T_0 k_3 \end{aligned}$$

gegeben sind. Der Einfluss der Abtastzeit  $T$  auf den Regelalgorithmus ist deutlich zu erkennen und auch durch die Schreibweise  $K(s, T)$  extra hervorgehoben. Die sich ergebende nichtlineare Struktur dieser Übertragungsfunktion ist sowohl in Glg. (3.4) als auch in Bild 3.4 durch die Division durch die Abtastzeit  $T$  zu erkennen.

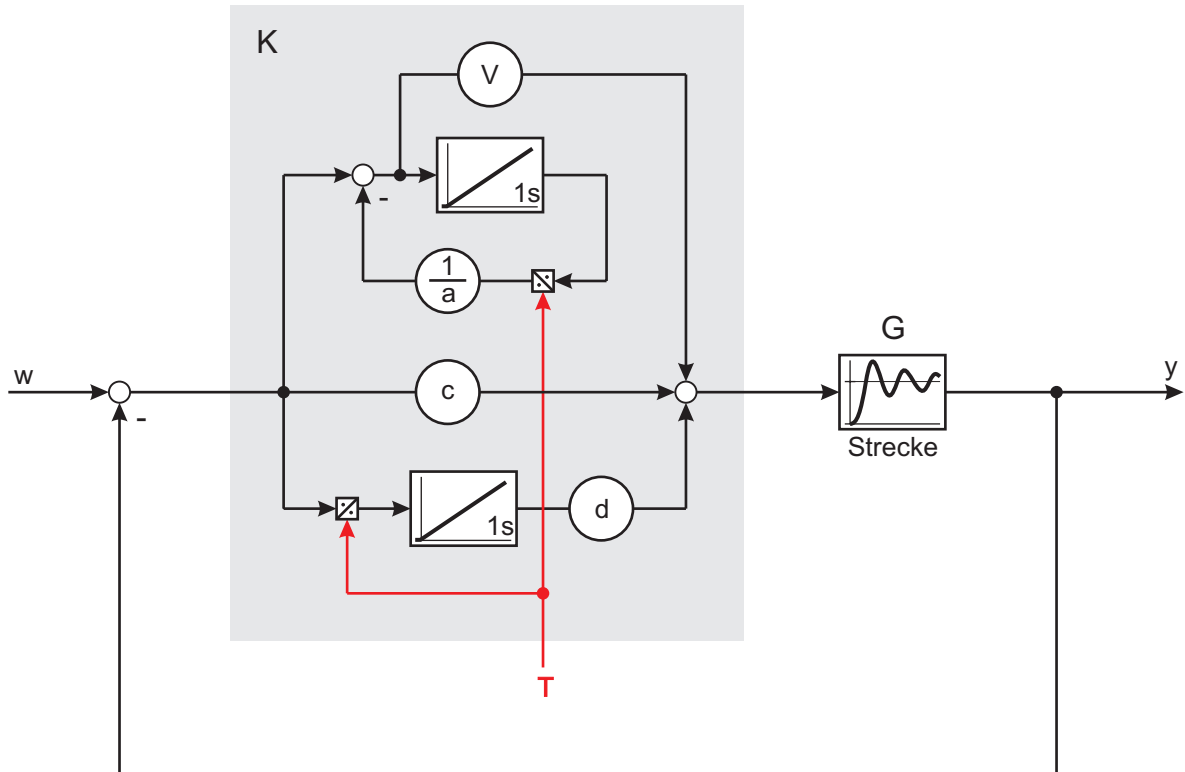


Bild 3.4: Nichtlineare Struktur des Reglers unter Einfluss einer sich ändernden Abtastzeit

Aus dem hybriden linearen System ist ein kontinuierliches nichtlineares System mit explizitem Eingriff der Abtastzeit geworden.

### 3.3 Modellierung der veränderlichen Abtastung

Die Abtastzeit geht reziprok in die Übertragungsfunktion des Reglers ein, womit ein nichtlinearer geschlossener Kreis aus Regler und Strecke entsteht. Da Stabilitätsuntersuchungen anhand dieser Struktur bei nicht bekannter Variation der Abtastzeit  $T$  analytisch nur sehr schwer zu betreiben sind, ist eine weitere Umformung des Systems erforderlich. Dazu wird die Änderung der Abtastzeit wie folgt eingeführt

$$T = T_0 (1 + \alpha \delta), \quad (3.5)$$

wobei  $\alpha$  die maximal zulässige Abweichung von der nominellen Abtastzeit  $T_0$  darstellt. Die Größe  $\delta \in [-1, 1]$  beschreibt die Unsicherheit der Abtastzeit und kann dynamisch beliebig zwischen den Grenzen  $-1$  und  $1$  variiert werden. Die  $\infty$ -Norm von  $\delta$  ist somit stets kleiner gleich 1.

Aufgrund der strukturellen Einschränkungen für den Parameter  $T$  liegt der Gedanke nahe, diesen als strukturierte Unsicherheit zu beschreiben.

Glg. (3.5) lässt sich durch das Blockschaltbild 3.5a als untere lineare Fraktionaltransformation darstellen und formelmäßig zu

$$T = \text{LFT} \left( \begin{bmatrix} T_0 & \alpha T_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \delta \right) \quad (3.6)$$

angeben.

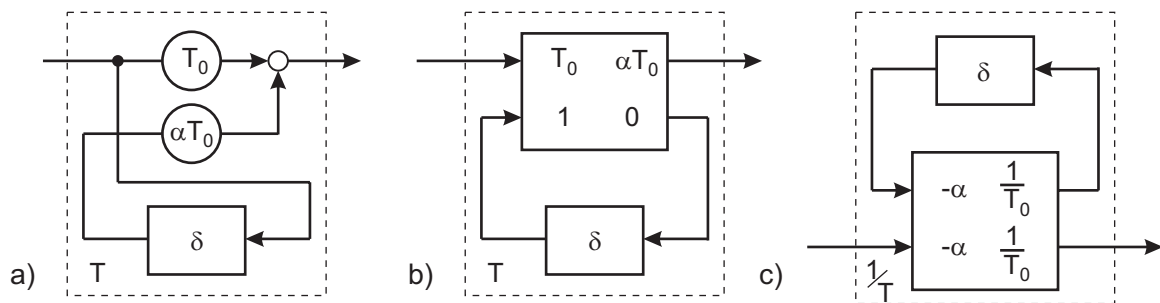


Bild 3.5: a) unsichere Abtastzeit  $T$  als Blockschaltbild gemäß Glg. (3.5) b) unsichere Abtastzeit  $T$  als untere LFT, c) Kehrwert der unsicheren Abtastzeit als obere LFT

In Bild 3.4 ist zu erkennen, dass anstelle von  $T$  die Inverse von  $T$  benötigt wird. Diese lässt sich durch einfaches Umformen der Glg. (3.6) gemäß Bild 3.5a) zu

$$\frac{1}{T} = \text{LFT}_u \left( \begin{bmatrix} -\alpha & \frac{1}{T_0} \\ -\alpha & \frac{1}{T_0} \end{bmatrix}, \delta \right) \quad (3.7)$$

angeben und ist in Bild 3.5c) dargestellt. Es wurde dazu der Satz zur Inversion von LFTs gemäß Glg. (2.26) angewandt.

Der so entstandene lineare kontinuierliche geschlossene Kreis mit zwei „unsicheren“ Eingriffen der Abtastzeit ist in Bild 3.6 dargestellt, wobei die Unsicherheiten  $\delta$  der beiden Eingriffspunkte zu einem Unsicherheitsblock  $\Delta_s$  zusammengefasst wurden.

$$\Delta_s = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

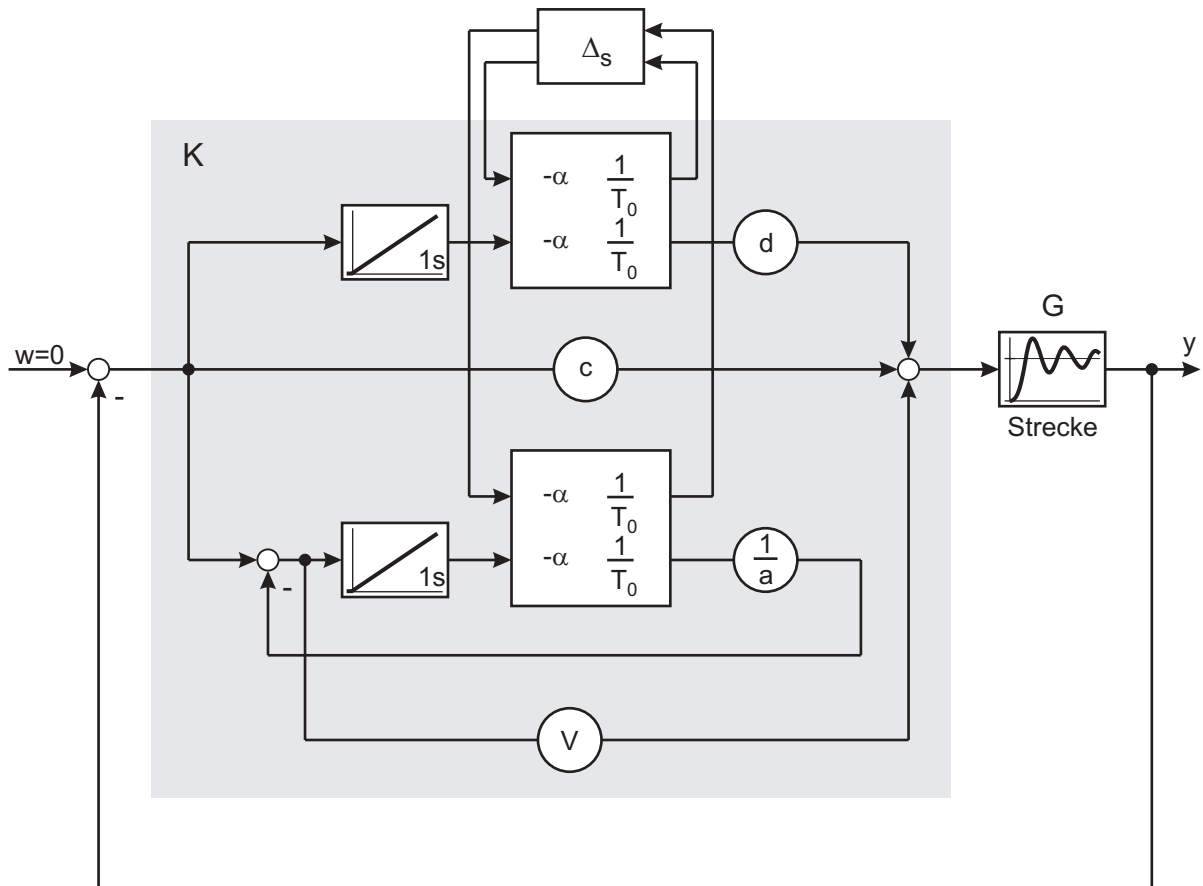


Bild 3.6: Variation der Abtastzeit dargestellt als Unsicherheit  $\Delta_s$

Das in Bild 3.6 dargestellte System, bestehend aus einem „unsicheren“ Regler  $K(s, \Delta_s)$  und



einer Strecke  $G(s)$ , könnte nun auf robuste Stabilität untersucht werden, wäre nicht durch Anwendung der bilinearen Transformation ein kleiner systematischer Fehler begangen worden, der die Ergebnisse verfälschen würde. Dieser Fehler muss im Folgenden noch berücksichtigt werden.

### 3.4 Berücksichtigung des Fehlers der bilinearen Transformation

Eine Korrektur für den durch den Einsatz der bilineare Transformation verursachten Fehler kann durch Einbringen einer zusätzlichen unstrukturierten Unsicherheit pro Eingriffspunkt der Abtastzeit vorgenommen werden. Unstrukturierte Unsicherheiten sind bekanntlich prädestiniert systematische oder gänzlich unbekannte Modellfehler zu beschreiben.

In einem ersten Schritt ist es daher notwendig, die bilineare Transformation näher zu betrachten.

Die bilineare Transformation entsteht als Näherung für die Reihenentwicklung des Logarithmus aus dem für die exakte  $z$ -Transformation bekannten Zusammenhang

$$z = e^{Ts} . \quad (3.9)$$

Löst man diese Gleichung nach  $s$  auf, erhält man

$$s = \frac{1}{T} \ln(z) . \quad (3.10)$$

Wird der Logarithmus in Glg. (3.10) in eine Reihe entwickelt, entsteht der Zusammenhang

$$\ln(z) = 2 \left[ \left( \frac{z-1}{z+1} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \dots \right] , \quad (3.11)$$

welcher nach Tustin nach dem linearen Glied abgebrochen wird und damit einer Padé-Approximation 1. Ordnung entspricht [4].

Die bilineare Transformation beruht auf dieser Tustin-Formel und gibt näherungsweise den Zusammenhang der Lage der Pole in der  $s$ - und in der  $z$ -Ebene wieder. Es gilt daher

$$s \approx \frac{2}{T} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) \quad (3.12)$$

bzw.

$$z \approx \frac{2 + T s}{2 - T s} \quad (3.13)$$

für die Inverse.

Die Bilder 3.7 und 3.8 zeigen die Unterschiede bei Abbildungen von Polen zwischen der  $s$ - und der  $z$ -Ebene mit Hilfe der exakten  $z$ -Transformation bzw. der bilinearen Transformation.

Die Lage der Pole ist ausschlaggebend für die spätere Stabilitätsuntersuchung des Gesamtsystems.

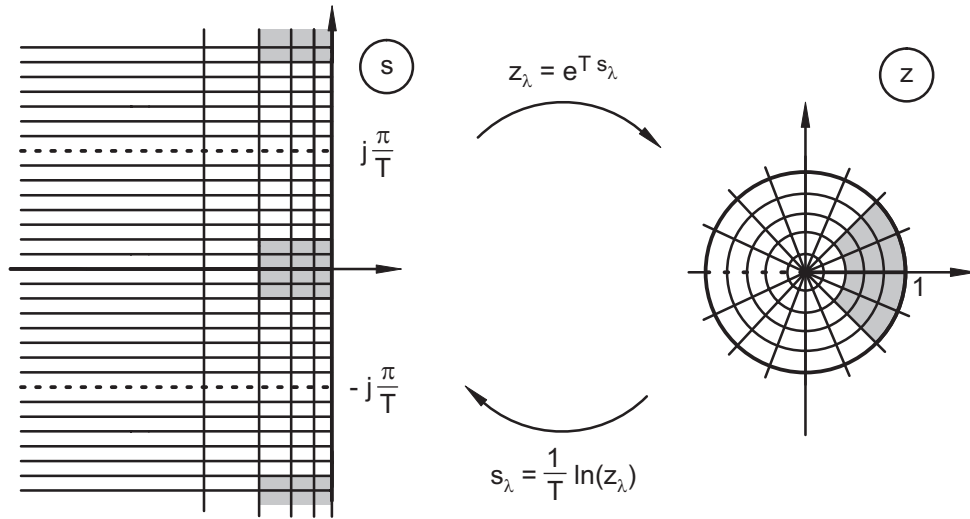


Bild 3.7: Zusammenhang der Lage der Pole in  $s$ - und  $z$ -Ebene nach exakter  $z$ -Transformation

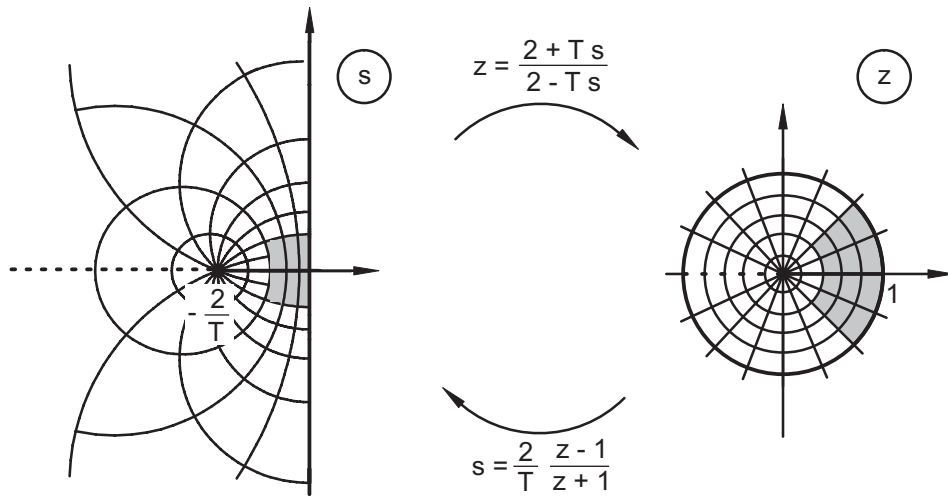


Bild 3.8: Zusammenhang der Lage der Pole in  $s$ - und  $z$ -Ebene nach bilinearer Transformation nach Tustin-Formel

In den Bildern 3.7 und 3.8 ist zu erkennen, dass in den grau hervorgehobenen Bereichen die Verzerrung bei der Abbildung durch die bilineare Transformation gegenüber der exakten  $z$ -Transformation nur sehr gering ist [70]. Dies gilt für kleine Abtastzeiten in Bezug auf die dominanten Streckenzeitkonstanten und ist für quasikontinuierlich ausgelegte Regler stets erfüllt.

Trotzdem ist der durch Einsatz der bilinearen Transformation verursachte Fehler für die folgenden Stabilitätsuntersuchungen zu berücksichtigen.

Betrachtet man Bild 3.8 genauer, so tritt bei der Abbildung der größte Fehler im grauen Bereich an der oberen bzw. unteren linken Ecke auf. Der hervorgehobene Bereich entspricht dem Bereich von  $0,4 \leq |z| \leq 1,0$  und dem Winkelbereich von  $|\varphi| \leq \frac{\pi}{4}$  in der  $z$ -Ebene, in dem die Pole des Reglers im Allgemeinen liegen. Die Wahl des gekennzeichneten Bereichs kann daher als sehr konservativ angenommen werden.

Wie erwähnt, liegt der Worst Case Fall in den linken Ecken und verursacht dort einen maximalen Fehler von knapp 14 %. Dieser Fehler wird für die folgenden Stabilitätsuntersuchungen durch eine unstrukturierte Modellunsicherheit modelliert und damit in die weiteren Betrachtungen einbezogen.

### 3.4.1 Modellierung als unstrukturierte Unsicherheit

Nachdem der Einfluss des Fehlers durch Anwendung der bilinearen Transformation bekannt ist, kann dieser als unstrukturierte Unsicherheit berücksichtigt werden.

Da nähere Informationen über die Veränderung der Abtastzeit nicht bekannt sind, kann der durch die bilineare Transformation resultierende systematische Fehler nur als unstrukturierte Unsicherheit, als Obermenge der strukturierten Unsicherheiten, modelliert werden.

Bild 3.9 zeigt das sich ergebende System mit den multiplikativen unstrukturierten Unsicherheiten  $\delta_u$  vor den Integratoren, die die geringe Veränderung der Systemdynamik aufgrund des systematischen Fehlers durch Einsatz der bilinearen Transformation berücksichtigen.  $\beta$  stellt dabei einen Skalierungsfaktor dar, der den Einfluss des Fehlers der bilinearen Transformation in Abhängigkeit von der Relation der dominierenden Streckenzeitkonstanten zur Abtastzeit spezifiziert.

Mittels der oben angegebenen Näherung der bilinearen Transformation als Ersatz für die exakte  $z$ -Transformation muss der Skalierungsfaktor für den dort angegebenen Bereich zu  $\beta = 14 \% = 0,14$  gewählt werden, um sicher robuste Stabilität mit der vorgestellten Methode garantieren zu können. Eine Anpassung von  $\beta$  an die realen Gegebenheiten lässt den Bereich

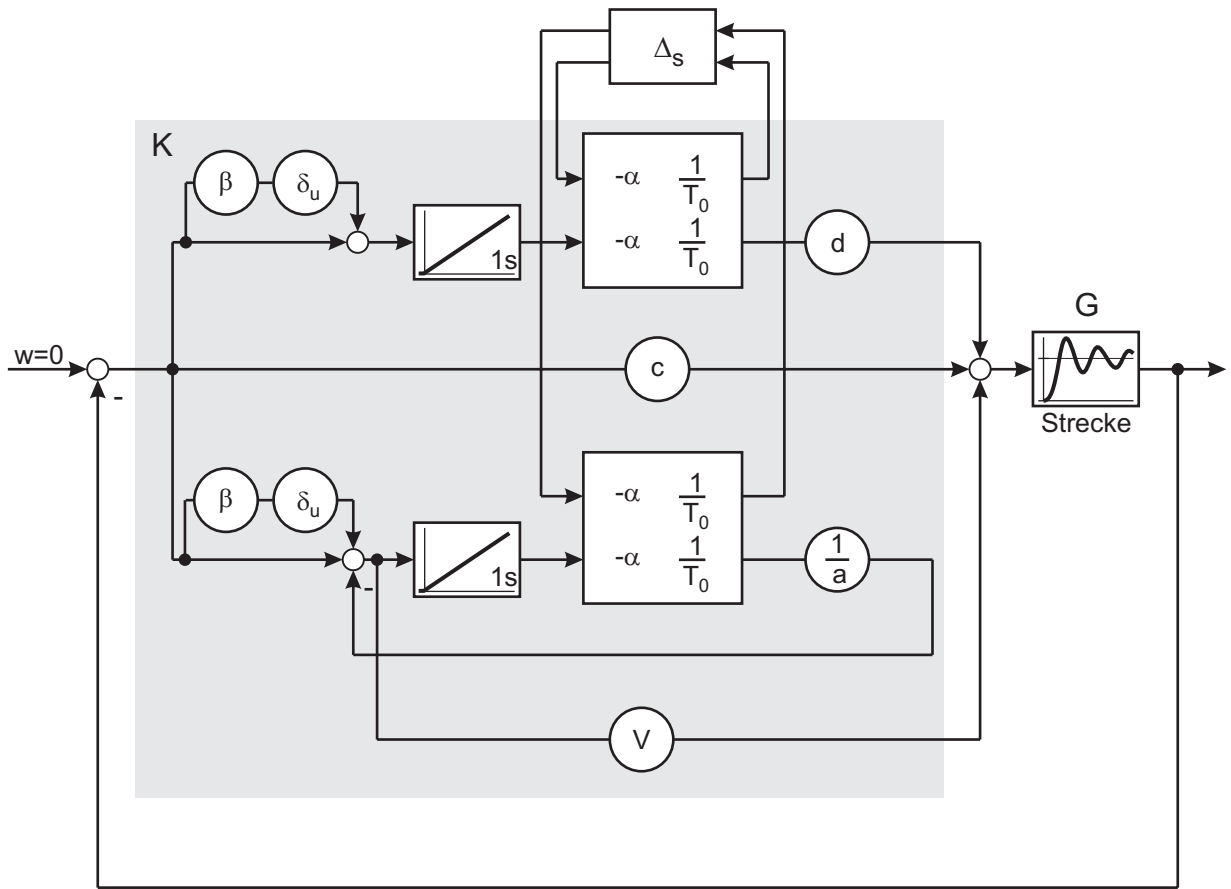


Bild 3.9: Berücksichtigung des Fehlers durch Anwendung der bilinearen Transformation

der Unsicherheiten durch Anwendung der bilinearen Transformation im Einzelfall noch weiter einschränken.

### 3.4.2 Gesamtstruktur

In einem nächsten Schritt können die unstrukturierten Unsicherheiten aufgrund der bilinearen Transformation zu einer Unsicherheitsmatrix  $\Delta_u$

$$\Delta_u = \begin{bmatrix} \delta_u & 0 \\ 0 & \delta_u \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

zusammengefasst werden. Diese können dann wiederum mit der strukturierten Unsicherheitsmatrix  $\Delta_s$ , hervorgerufen durch die Variation der Abtastzeit, zu einer Gesamtunsicherheit  $\Delta$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_u & 0 \\ 0 & \Delta_s \end{bmatrix} \quad (3.15)$$



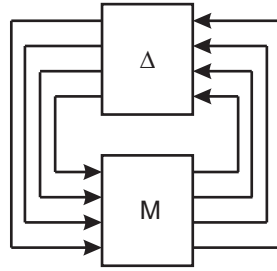


Bild 3.11: System in Standardform

und  $\delta_u \in [-1, 1]$ , gilt auch für die Unsicherheitsmatrix  $\Delta$

$$\|\Delta\|_\infty \leq 1. \quad (3.16)$$

Zur Überprüfung auf robuste Stabilität ist die Übertragungsfunktion  $M$  vom Ausgang der Unsicherheit  $\Delta$  zu deren Eingang in Bild 3.10 zu berechnen, wobei alle externen Eingänge zu Null gesetzt werden.

Liegt nach Glg. (2.74) der größte strukturierte singuläre Wert (SSV) dieser Übertragungsfunktion unterhalb von 1, so wird robuste Stabilität gewährleistet und der geschlossene Kreis ist auch bei Anwesenheit der durch  $\Delta$  beschriebenen Abweichungen stabil.

Für den Fall, dass der größte SSV von  $M$  bei  $\gamma < 1$  liegt, kann robuste Stabilität für eine größere Unsicherheit als angenommen gewährleistet werden.

$$\sup_{\omega} \mu_{\Delta}(M) \leq \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\gamma} \quad (3.17)$$

Das folgende Bild 3.12 zeigt als durchgezogene Linie die Obergrenze und als gestrichelte Linie die Untergrenze für den strukturierten singulären Wert des Beispielsystems für eine angenommene Abweichung der Abtastzeit um  $\pm 25\%$ . Es gilt daher  $\alpha = 0,25$ . Bei rein reellen Unsicherheiten können numerische Probleme bei der Berechnung der SSV auftreten. Aus diesem Grund ist in den linken beiden Diagrammen in Bild 3.12 eine komplexe Unsicherheit  $\delta$  für die Abtastzeit und somit auch für  $\Delta$  angenommen worden, obwohl es sich eigentlich um eine reelle Parameterunsicherheit handelt. Bei den unstrukturierten Unsicherheiten  $\delta_u$  zur Modellierung des Fehlers, hervorgerufen durch den Einsatz der bilinearen Transformation, handelt es sich ohnehin um komplexe Unsicherheiten.

Die beiden rechten Diagramme wurden für eine reelle Unsicherheit mit einem einprozentigen komplexen Anteil berechnet, um etwaigen numerischen Schwierigkeiten zu entgehen. Der komplexe Ansatz ist konservativer als der reelle, da ein größerer Bereich der Unsicherheit zugelassen wird.

Es ist aus den Diagrammen zu erkennen, dass der größte singuläre Wert im Falle des reellen Ansatzes etwas kleiner ist als im Falle des komplexen Ansatzes für die Parameterunsicherheiten. Im Allgemeinen lassen sich mit dem reellen Ansatz für reelle Unsicherheiten schärfere Aussagen treffen, allerdings mit dem Risiko, schneller in numerische Probleme zu geraten.

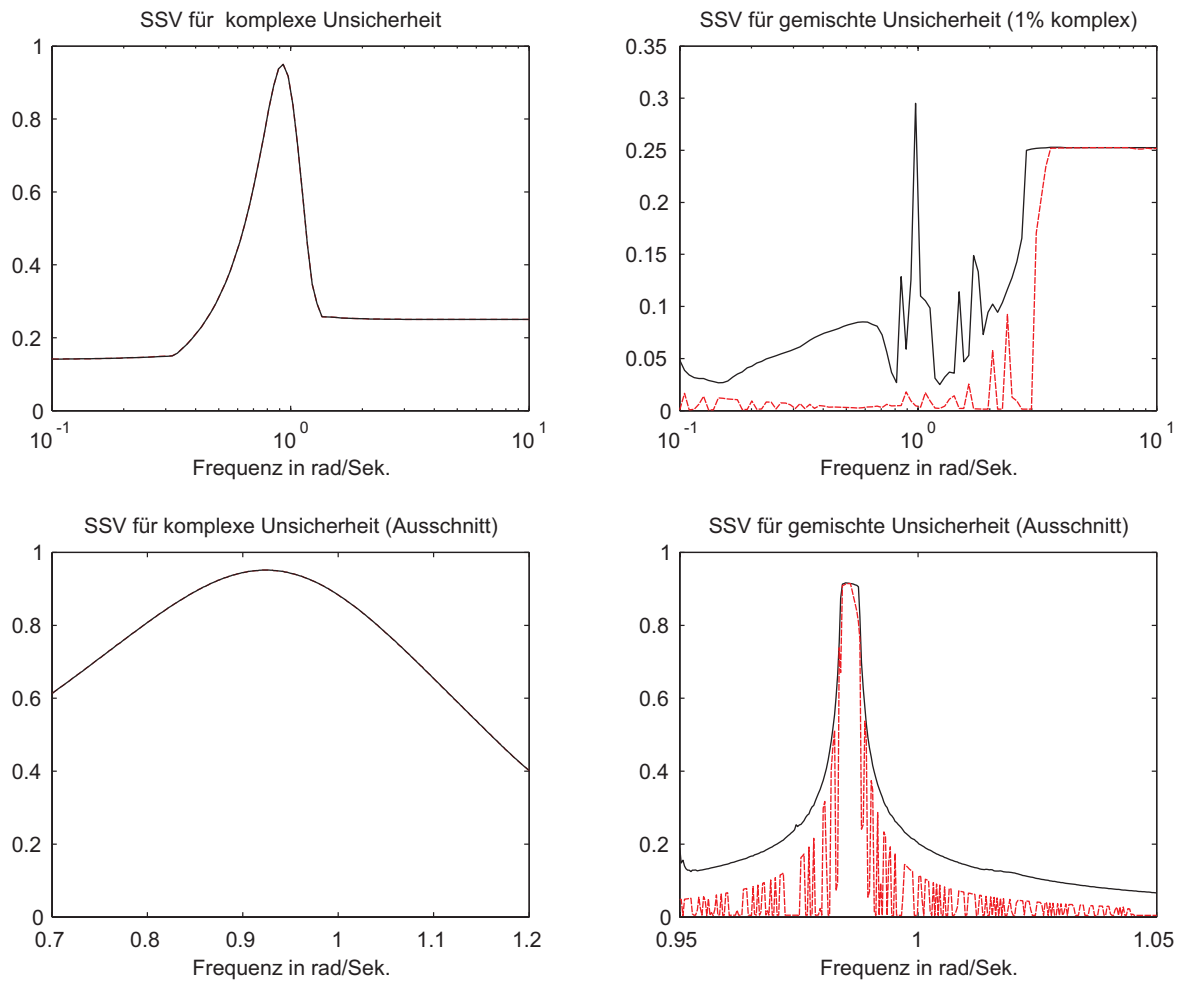


Bild 3.12: Plot der strukturierten Singulären Werte bei  $\alpha = 0,25$

Der größte strukturierte singuläre Wert kann aus dem  $\mu_{\Delta}$ -plot in Bild 3.12 zu  $\gamma = 0,92$  bestimmt werden. Da dieser Wert kleiner als eins ist, ist eine größere Abweichung als die angenommenen 25 % zulässig. Sie ergibt sich nach Glg. (3.17) zu

$$\frac{0,25}{\gamma} = \frac{0,25}{0,92} = 0,2717,$$

also  $\pm 27,17\%$  für den garantiert stabilen Variationsbereich. Damit ergibt sich ein Bereich

für die Abtastzeit in dem robuste Stabilität gewährleistet wird zu

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\alpha}{0,92} \delta\right) \quad \text{mit} \quad \delta \in [-1, 1].$$

Im Falle dieses Beispiels ist eine Absenkung der Abtastzeit sehr kritisch, da hierdurch die Verstärkung des Reglers erhöht und somit die Dämpfung des geschlossenen Kreises reduziert wird. Die Stabilitätsgrenze ergibt sich nach der obigen Gleichung zu  $T_{\min} = 0,0728$  bei einer nominellen Abtastzeit von  $T_0 = 0,1$ . Die ermittelte untere Stabilitätsgrenze konnte durch Simulation bestätigt werden.

Neben der hier ermittelten kritischen Absenkung der Abtastzeit bis auf  $T_{\min}$  wird der geschlossene Kreis auch für eine Erhöhung der Abtastzeit auf  $T_{\max}$  instabil. Dieser zweite Fall wurde bei der Untersuchung der robusten Stabilität nicht erkennbar, da die Grenze  $T_{\max}$  weit außerhalb des durch  $\alpha$  und  $\delta$  beschriebenen Bereichs liegt.

Um diese Grenze ebenfalls zu bestimmen erfolgten Stabilitätsuntersuchungen im zeitdiskreten Bereich der  $z$ -Ebene. Untersucht wurde dabei die Lage der Pole des geschlossenen Kreises im Einheitskreis, wobei die Parameter des diskreten Reglers für die nominelle Abtastzeit  $T_0$  konstant gehalten wurden und die kontinuierliche Strecke für jeden Abtastschritt  $T$  neu diskretisiert wurde. Die Lage der Pole wurde für verschiedene Abtastzeiten  $T$  berechnet und als eine Wurzelortskurve mit dem Parameter  $T$  aufgetragen. Bild 3.13 zeigt die sich für dieses Beispiel ergebenden Positionen der Pole. Es ist leicht zu sehen, dass die Pole nahe am Rand des Einheitskreises liegen und unser Beispielsystem damit sehr kritisch gegenüber Parameteränderungen ist.

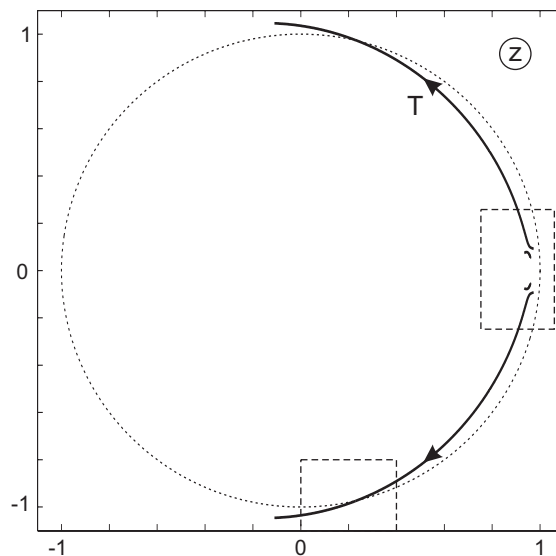


Bild 3.13: Lage der Pole mit Abtastzeit  $T$  als Parameter



Bild 3.14 zeigt Ausschnitte der für die Stabilität relevanten Bereiche, welche auch in Bild 3.13 durch gestrichelte Kästen angedeutet sind. Der geschlossene Kreis ist stabil, wenn alle Pole innerhalb des Einheitskreises liegen. Sobald aber ein Pol den Einheitskreis verlässt, entstehen aufklingende Schwingungen die zu Instabilität des gesamten Systems führen.

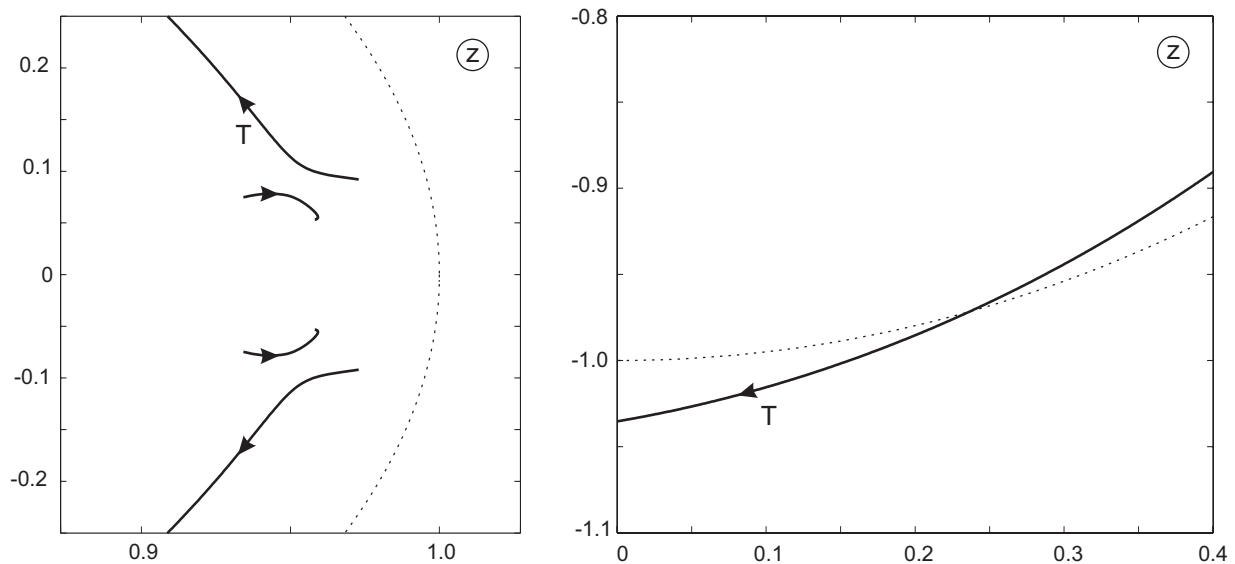


Bild 3.14: Lage der Pole an der Stabilitätsgrenze

Die aus diesem Diagramm ermittelte obere Stabilitätsgrenze beträgt  $T_{\max} = 0,993$ .

Der hier untersuchte Fall eines diskreten PID-Reglers und einer schwingungsfähigen schwach gedämpften Strecke 2. Ordnung zeigt, dass betreffend der Stabilität durchaus eine Variation der Abtastzeit zulässig ist, die Regelqualität dabei aber beliebig schlecht werden kann.

Der als stabil garantierte Bereich für Abweichungen der Abtastzeit vom nominellen Wert beträgt

$$T_{\min} = 0,0728 < T < T_{\max} = 0,993,$$

wobei die nominelle Abtastzeit bei  $T_0 = 0,1$  lag. Die Abtastzeit kann im Beispiel um etwa 27 % verkleinert und um etwa 993 % erhöht werden.

An den Stabilitätsgrenzen ergeben sich ungedämpfte Schwingungen, die in Bild 3.15 für die jeweils entsprechenden Abtastzeiten dargestellt sind.

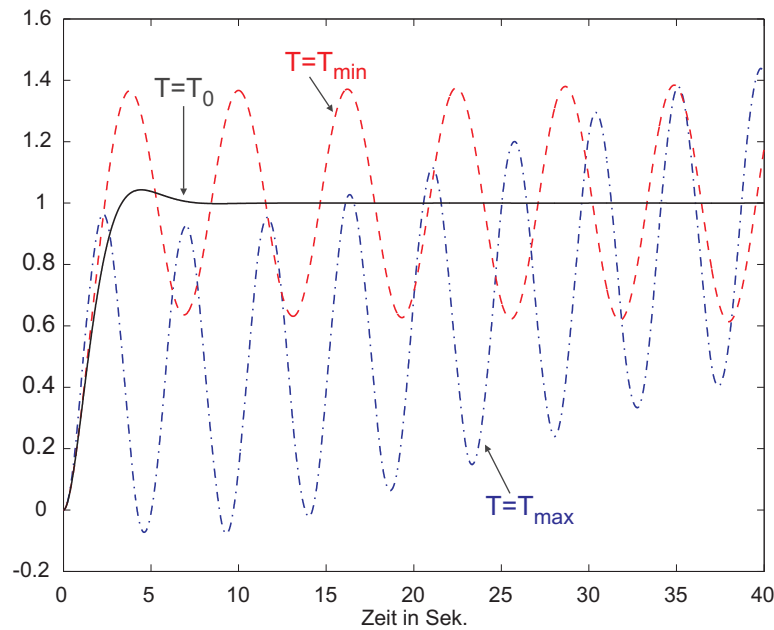


Bild 3.15: Sprungantwort des geschlossenen Kreises bei nomineller Abtastzeit  $T = T_0$ , bei  $T = T_{\min}$  und bei  $T = T_{\max}$

### 3.6 Zusammenfassung

Die am Beispiel vorgestellte Vorgehensweise zur Untersuchung der Stabilität stellt eine gute Möglichkeit dar, mit Methoden der robusten Regelungstechnik, die Stabilität des Gesamtsystems, bei Anwesenheit einer veränderlichen Abtastzeit oder äquivalent dazu veränderlicher Buslaufzeiten, zu garantieren.

Die vorgestellte Methode kann in folgenden Schritten kurz zusammengefasst werden:

1. Modellierung der kontinuierlichen Strecke  $G(s)$  im Frequenzbereich
2. Beschreibung des zeitdiskreten Reglers  $K(z)$  im  $z$ -Bereich für die nominelle Abtastzeit  $T_0$ .
3. Transformation des zeitdiskreten Reglers mit Hilfe der bilinearen Transformation in den Frequenzbereich  $K(z) \rightarrow K(s)$
4. Modellierung des Einflusses der Abtastzeit als strukturierte Unsicherheit  $\Delta_s$  ausgedrückt durch lineare Fraktionaltransformationen.
5. Berücksichtigung des Fehlers durch Anwendung der bilinearen Transformation als unstrukturierte Unsicherheit  $\Delta_u$ .

6. Zusammenfassen der Unsicherheiten  $\Delta_s$  und  $\Delta_u$  zu einer Gesamtunsicherheit  $\Delta$  und zusammenfassen des Systems bestehend aus Strecke und Regler zu einem Block  $M$ .
7. Untersuchung des Systems  $M$  auf robuste Stabilität bei Anwesenheit der definierten Unsicherheiten  $\Delta$ .

Voraussetzung zur Anwendung dieser Methode ist, dass das zu untersuchende System Element des Raumes  $\mathcal{RH}_\infty$  ist und somit den in Abschnitt 2.3.2 definierten Bedingungen genügt. Des Weiteren muss bei der Verwendung der bilinearen Transformation darauf geachtet werden, dass sich die Reglerpole innerhalb des definierten Bereiches befinden, andernfalls ist eine Anpassung des eingeführten Parameters  $\beta$  erforderlich.

Eine Erweiterung auf beliebige andere Reglertypen ist trivial, da der Einfluss der Abtastzeit immer, wie vorgestellt, durch eine lineare Fraktionaltransformation dargestellt werden kann.

## 4 Versuchsaufbau

In diesem Kapitel wird der für die Stabilitätsuntersuchungen eingesetzte Versuchsstand vorgestellt. Er dient zur Gleichlaufregelung von vier Motoren bei Anwesenheit von Jitter in der Regelung bzw. Messwerterfassung. Ein Motor fungiert dabei als Master, die anderen drei als Slaves, deren Drehzahl und Lage an die des Masters anzupassen sind.

Bild 4.1 verdeutlicht die Anordnung der vier Motoren mit je einer aufgesetzten Rotations-scheibe. In der Mitte befindet sich der Master-Motor und außen herum symmetrisch angeordnet die drei Slave-Motoren. Durch den Schlitz in der Scheibe des Masters und den Punkten auf den Scheiben der Slaves kann visuell sehr leicht ein Winkelgleichlauf auf Basis des stroboskopischen Effekts festgestellt werden.

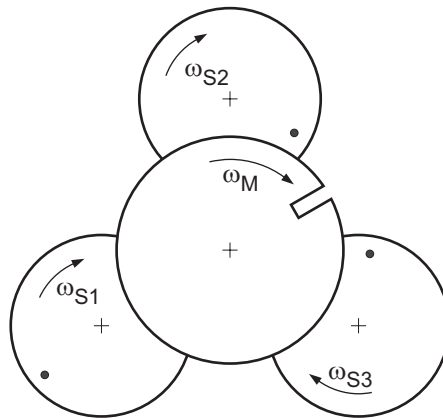


Bild 4.1: Anordnung der vier Motoren

Im Rahmen eines Industrieprojektes wurde die Implementierung einer Antriebsregelung auf einer speicherprogrammierbaren Steuerung (SPS) mit einem nicht synchronisierten Bus untersucht. Der Fokus lag dabei auf den Unterschieden zwischen *synchroner* und *asynchroner* Messwerterfassung bezogen auf die Abtastzeit des Reglers, also einem Jittern.

Unter *synchroner* Regelung soll hier verstanden werden, dass die Regelung mit der Messwerterfassung (Inkrementalgeber) und Übertragung (Profibus-DP) synchronisiert ist. D. h., dass zu jedem Aufruf des Regelalgorithmuses ein zeitlich zugehöriger Lage-Istwert zur Verfügung

steht. Dies stellt auch den idealen Fall dar und wird in der CPU durch ein zur Verfügung gestelltes Spezialbetriebsystem realisiert.

Unter *asynchroner* Regelung sollen hier die im Mittel konstanten aber nicht synchronisiert stattfindenden Zyklen des Reglers und der Messwerterfassung/-übertragung verstanden werden. Wie schon erwähnt, ist die asynchron stattfindene Messwerterfassung mit dem Jittern der Reglerabtastzeit gleichzusetzen.

Im Folgenden wird der physikalische Aufbau des Versuchsstandes beschrieben, die verwendeten Komponenten aufgelistet und ein Einblick in die implementierte Softwarestruktur der eingesetzten SPS gegeben.

## 4.1 Komponenten des Versuchsstandes

Der Versuchsstand besteht aus vier permanenterregten Gleichstrommotoren der Firma Maxon Motor GmbH, ausgestattet mit je einem Inkrementalgeber mit 2000 Inkrementen pro Umdrehung. Die Nennspannung beträgt 24 V bei einer Typenleistung von 15 W. Der Nennstrom errechnet sich daraus zu 625 mA. Als Leerlaufdrehzahl sind  $5750 \text{ min}^{-1}$  angegeben.

Als Stellglieder werden pro Motor je ein Servoverstärker ADS 50/5 von Maxon Motor verwendet. Es handelt sich dabei um pulsweitenmodulierte (PWM) Servoverstärker mit integrierter Stromregelung. Der Ausgang kann einen maximalen Strom von 10 A liefern. Die Schaltfrequenz beträgt 50 kHz und ist damit hoch genug, um die Effekte zu vernachlässigen, die durch gepulsten Betrieb von Antrieben entstehen können.

Die Regelung und Messwertverarbeitung erfolgt in einer SPS der Firma Siemens vom Typ S7 mit der CPU 417-4 und einer speziellen Firmware. Die Kommunikation mit den Stellgliedern und den Inkrementalgebern erfolgt über den Profibus-DP. Die Stellwerte der Regler werden über den Bus an zwei IM-178-4 Profibus-Anschaltbaugruppen übermittelt. Diese besitzen je zwei Kanäle und wandeln den digitalen Stellwert in eine analoge Spannung zwischen  $\pm 10 \text{ V}$  um. Diese wird direkt auf den Eingang der Servoverstärker als Sollwert für die Stromregler geschaltet.

In der anderen Richtung werden die Informationen der Inkrementalgeber von den IM178-4 Baugruppen auf den Profibus gestellt und können so von der CPU ausgewertet werden.

Des Weiteren steht eine Simulationsbaugruppe zur Verfügung, über die verschiedene Einstellungsmöglichkeiten bezüglich Regler und Messwerterfassung vorgenommen werden können.

Das folgende Bild 4.2 zeigt einen Überblick über die Verschaltung und Tabelle 4.1 eine Aufstellung der im Versuchsstand eingesetzten Komponenten.

Tabelle 4.1: Komponenten des Versuchsstandes

Bezeichnung	Firma	Best.-Nr.	Anzahl
CPU 417-4	Siemens AG	6ES7417-4XL00-0AB0	1
PS 407 10A	Siemens AG	6ES7407-0KA01-0AA0	1
IM 178-4 Drive Interface	Siemens AG	6ES7178-4BH00-0AE0	2
Simulationsbaugruppe	Siemens AG	C79459-A1002-A1	1
Baugruppenträger	Siemens AG	-	1
Gleichstrommotor	Maxon Motor GmbH	2332.968-51.236-200	4
DC Servoverstärker ADS 50/5	Maxon Motor GmbH	145391	4
Motorgestell	-	Eigenbau	1

## 4.2 Überblick über die implementierte Software

Wie anfangs schon erwähnt, besteht bei dem Versuchsstand die Möglichkeit zwischen synchroner und asynchroner Regelung umzuschalten, um das Verhalten ohne bzw. mit Jittern vergleichen zu können. Um sicherzustellen, dass im synchronisierten Betrieb die Äquidistanz im Regler und der Messwerterfassung/-übertragung exakt dargestellt werden kann, stattete die Firma Siemens die SPS mit einer Spezialfirmware aus.

Für jeden der vier Motoren wurde ein PI-Drehzahlregler und zur Vermeidung von Überschwüngen bei Sprunganregung ein FührungsfILTER implementiert. Dieses hat auf die Stabilität des Regelkreises keinen Einfluss, da es sich außerhalb des geschlossenen Kreises befindet und daher für die folgenden Untersuchungen vernachlässigt werden kann. Des Weiteren wurde ein lineares und ein nichtlineares Istwertfilter implementiert, welche wahlweise zu und abgeschaltet werden können. Im Gegensatz zu dem FührungsfILTER beeinflussen die Istwertfilter direkt die Stabilität des Systems, da sie sich innerhalb des geschlossenen Kreises befinden und dort wie zusätzliche Verzögerungen wirken. Streng genommen müsste die Dynamik der Filter in den Reglerentwurf mit einbezogen werden. Da aber die eingebrachte Verzögerung, speziell die des nichtlinearen Filters, sehr klein in Bezug auf die dominierenden Systemzeitkonstanten ist, wurde sie vernachlässigt. Das lineare Istwertfilter wurde für die folgenden Betrachtungen deaktiviert und hat damit keinen Einfluss auf das System.

Neben den Drehzahlreglern wurde für jeden Slave-Motor ein Differenzlageregler (Versatzregler) implementiert, der den Winkelgleichlauf gewährleisten soll. Im Prinzip liefert der Versatzregler einen zusätzlichen Drehzahl-Sollwert abhängig von der Differenz der Lage der Slaves

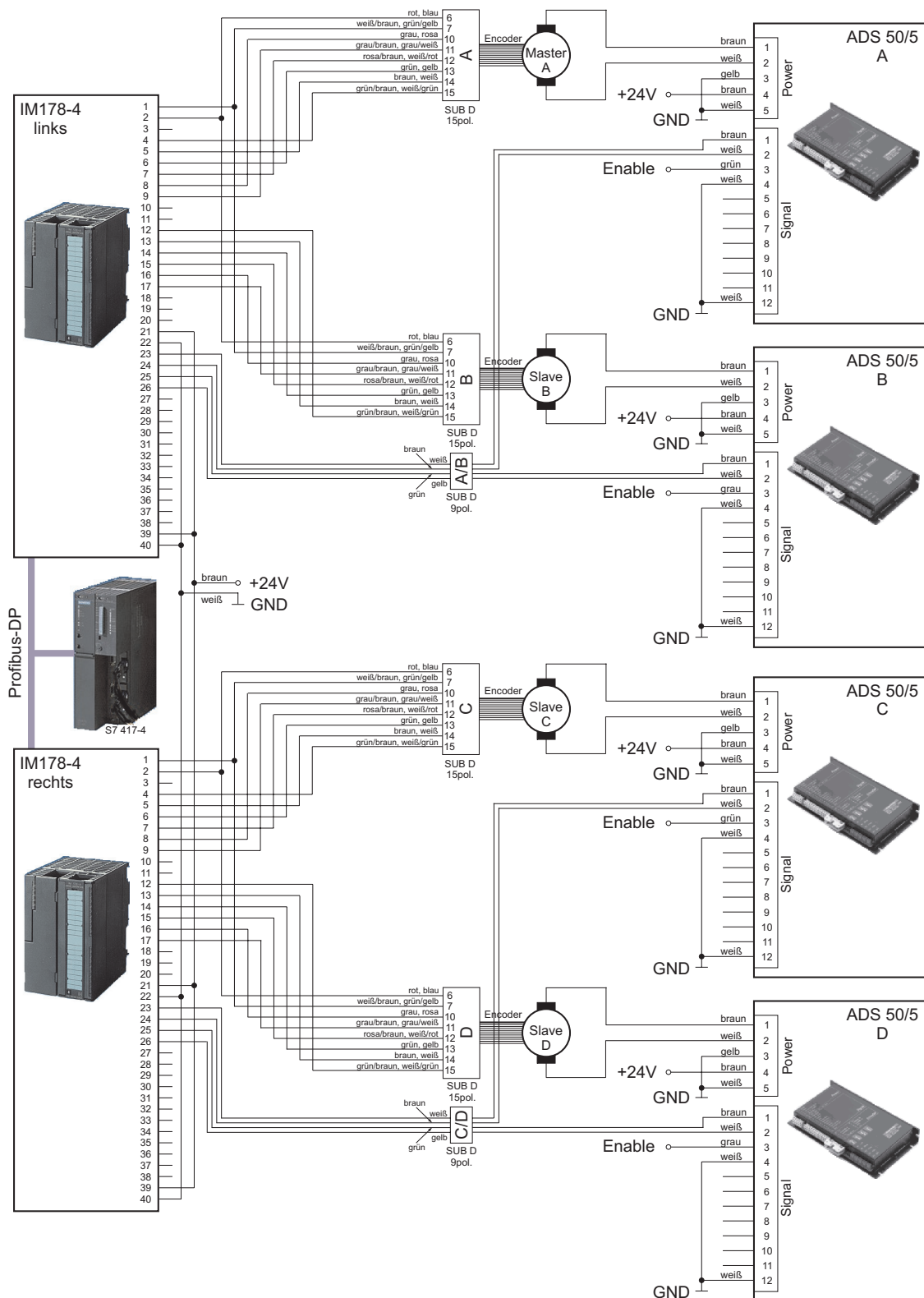


Bild 4.2: Verschaltung der einzelnen Komponenten des Versuchssandes

zur Lage des Masters. D.h. solange eine Abweichung der Lage zwischen Master und Slave vorhanden ist, liefert der Versatzregler eine Stellgröße, die dem Versatz entgegenwirkt.

Um gezielt einzelne Positionen anfahren zu können, wurde für den Master ein Lageregler implementiert. Zusätzliche Lageregler für die Slave-Motoren sind nicht erforderlich, da diese der Lage des Masters aufgrund der Versatzregler folgen.

Abschließend zeigt Bild 4.3 einen Überblick über die Softwarestruktur in Form eines Blockschaltbildes.



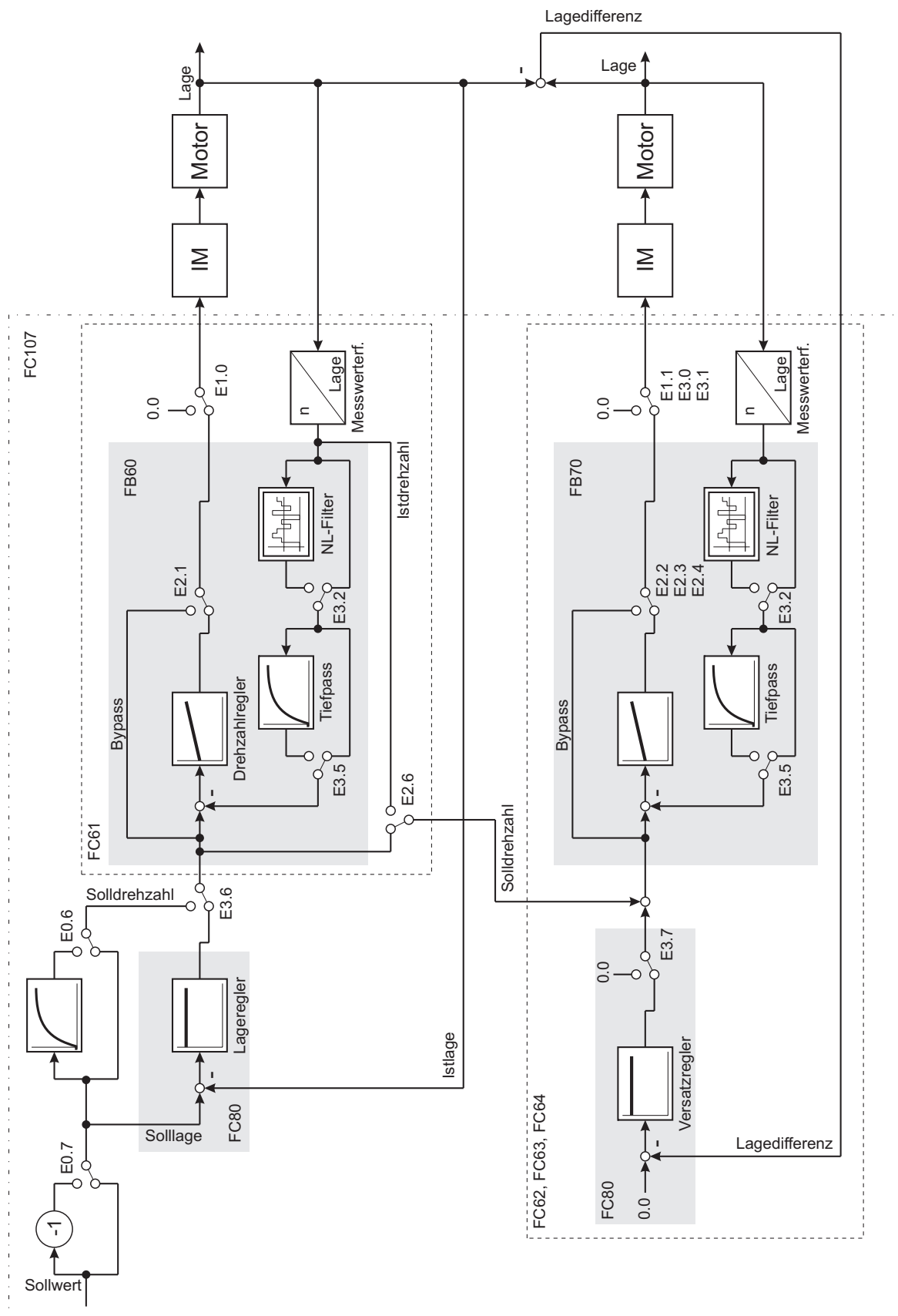


Bild 4.3: Überblick über die Softwarestruktur

## 5 Modellbildung und Reglerentwurf

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Modellbildung und dem Reglerentwurf für die im Versuchsstand eingesetzten Komponenten. Dazu wird als erstes ein Modell für eine fremderregte Gleichstrommaschine hergeleitet und anschließend auf den Fall der im Versuchsstand eingesetzten permanenten Erregung angepasst. Damit steht ein Modell der Antriebe zur Verfügung, anhand dessen die benötigten Drehzahl-, Versatz- und Lageregler ausgelegt werden können. Neben der Struktur werden auch die Dynamik beschreibenden Parameter benötigt. Diese stammen aus charakteristischen Größen des Datenblattes. Abschließend wird die im Versuchsstand eingesetzte Reglerstruktur vorgestellt und die Regler parametrisiert.

### 5.1 Modellbildung für die eingesetzten Komponenten

#### 5.1.1 Fremderregte Gleichstrommaschine

Als erstes wird ein regelungstechnisches Modell für die fremderregte Gleichstrommaschine angegeben. Die elektrischen, wie auch die Mechanik beschreibenden Differentialgleichungen werden als bekannt vorausgesetzt [41, 44].

Bei der fremderregten Gleichstrommaschine werden Anker- und Erregerkreis aus unterschiedlichen Spannungsquellen  $U_a$  bzw.  $U_e$  erregt. Ein elektrisches Ersatzschaltbild dieser Anordnung ist in Bild 5.1 zu sehen. Dabei stellen die Größen  $\phi_e$  und  $\phi_a$  den Erreger- bzw. den Ankerfluss dar.  $e$  repräsentiert die induzierte Spannung im Ankerkreis.

Mit Hilfe dieser Abbildung lässt sich das Verhalten der Maschine durch den folgenden Satz

von Differentialgleichungen beschreiben:

$$u_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e \quad (5.1)$$

$$u_e = R_e i_e + L_e \frac{di_e}{dt} \quad (5.2)$$

$$e = C_1 \omega \phi_e \quad (5.3)$$

$$m_a = C_2 i_a \phi_e \quad (5.4)$$

$$\Theta \frac{d\omega}{dt} = m_a - m_L \quad (5.5)$$

$$\omega = \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (5.6)$$

Die Größe  $\Theta$  stellt das Trägheitsmoment des Motors dar.  $C_1$  und  $C_2$  sind maschinenabhängige Konstanten und in der Regel im Datenblatt angegeben. Durch Normieren führt dies zu

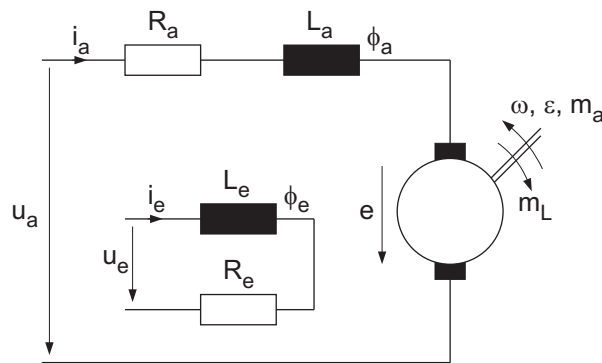


Bild 5.1: Ersatzschaltbild einer fremderregten Gleichstrommaschine

folgenden Gleichungen:

$$\frac{u_a}{u_{a0}} = \frac{R_a i_a}{R_a i_{a0}} + \frac{L_a}{R_a} \frac{d}{dt} \left( \frac{i_a}{i_{a0}} \right) + \frac{e}{u_{a0}} \Rightarrow T_a \frac{d}{dt} \left( \frac{i_a}{i_{a0}} \right) = \frac{u_a}{u_{a0}} - \frac{i_a}{i_{a0}} - \frac{e}{u_{a0}} \quad (5.7)$$

$$\frac{u_e}{u_{e0}} = \frac{R_e i_e}{R_e i_{e0}} + \frac{L_e}{R_e} \frac{d}{dt} \left( \frac{i_e}{i_{e0}} \right) \Rightarrow T_e \frac{d}{dt} \left( \frac{i_e}{i_{e0}} \right) = \frac{u_e}{u_{e0}} - \frac{i_e}{i_{e0}} \quad (5.8)$$

$$\frac{e}{u_{a0}} = \frac{C_1 \omega_0}{R_a i_{a0}} \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (5.9)$$

$$\frac{m_a}{m_0} = \frac{C_2 i_a}{C_2 i_{a0}} = \frac{i_a}{i_{a0}} \quad (5.10)$$

$$\frac{\Theta \omega_0}{m_0} \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) = \frac{m_a}{m_0} - \frac{m_L}{m_0} \Rightarrow T_n \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) = \frac{m_a}{m_0} - \frac{m_L}{m_0} \quad (5.11)$$

$$\omega_0 \frac{\omega}{\omega_0} = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) \Rightarrow T_\varepsilon \frac{d}{dt} \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (5.12)$$

Bisher wurde von einer linearen Beziehung zwischen dem Erregerfluss  $\phi_e$  und dem Erregerstrom  $i_e$  ausgegangen. Dies ist in der Praxis aufgrund der Sättigung des Eisens nicht der Fall. Daher wird eine neue Größe  $\Psi_e$  eingeführt, die den mit allen  $N$  Windungen des Ankers verketteten Erregerfluss  $\phi_e$  bezeichnet.

$$\Psi_e = N \phi_e \quad (5.13)$$

Aufgrund ihrer Verkettung nennt man diese Größe Verkettungsfluss.

Für den oben angesetzten linearen Fall galt  $\Psi_e = L_e i_e$ . Wird die in der Praxis auftretende Sättigung des Eisens mit steigendem Erregerfluss  $\phi_e$  beachtet, so ergibt sich ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen  $\phi_e$  und  $i_e$  gemäß einer Magnetisierungskurve (Bild 5.2).

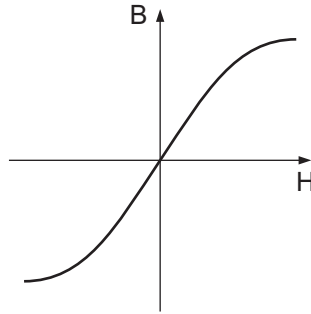


Bild 5.2: Inverse Magnetisierungskurve des Eisens

Für die Erregermasche gilt daher folgender Zusammenhang:

$$i_e = f(\phi_e) \quad (5.14)$$

$$u_e = R_e f(\phi_e) + \frac{d\Psi_e}{dt} = R_e f(\phi_e) + N \frac{d\phi_e}{dt} \quad (5.15)$$

In der Praxis weist die Kurve in Bild 5.2 zusätzlich eine Hysterese auf, was die mathematische Beschreibung erschwert, da beim Magnetisieren eine andere Kurve als beim Entmagnetisieren durchlaufen wird. Aus den Glgn. (5.14) und (5.15) lässt sich auf einfache Weise ein nichtlineares Blockschaltbild 5.3 für die Erregerseite angeben.

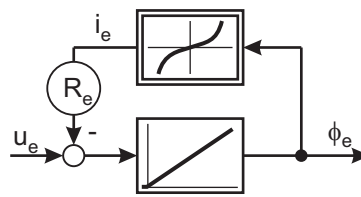


Bild 5.3: Nichtlineares Blockschaltbild des Erregerkreises

Zusammen mit den Glgn. (5.7) bis (5.12) erhält man das Blockschaltbild der fremderregten Gleichstrommaschine, welches in Bild 5.4 dargestellt ist.

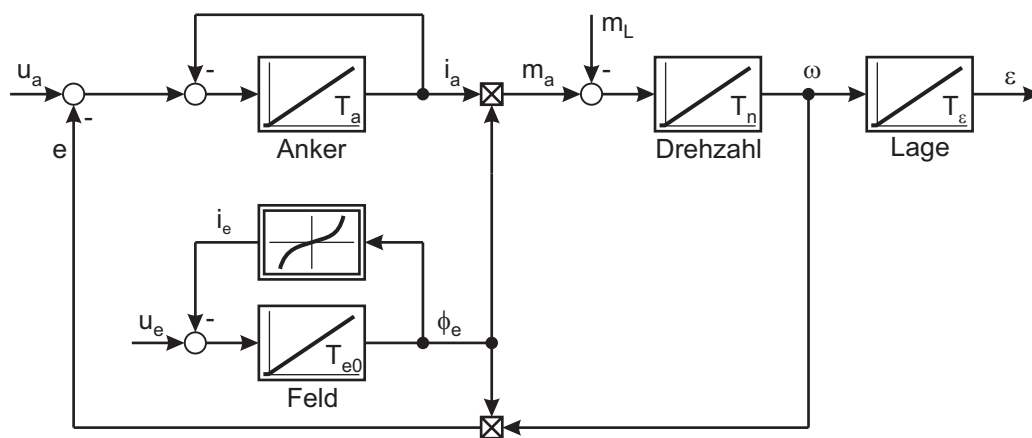


Bild 5.4: Blockschaltbild einer fremderregten Gleichstrommaschine

### 5.1.2 Permanenterregte Gleichstrommaschine

Die im Versuchsstand eingesetzten Motoren haben eine durch Magneten hervorgerufene permanente Erregung und können daher nicht durch Feldschwächung<sup>1</sup> beeinflusst werden. Dies hat zur Folge, dass die Erregung  $\phi_e$  als konstant anzunehmen ist. Aufgrund geschickter Normierungen kann erreicht werden, dass die normierte Erregung gleich 1 ist und sich dadurch das oben hergeleitete Blockschaltbild für die fremderregte Gleichstrommaschine erheblich vereinfacht. Mit der Normierung von  $\phi_e = 1$  fällt der nichtlineare Eingriff der Erregung vollständig heraus und es ergibt sich für die permanenterregte Gleichstrommaschine ein einfaches lineares Blockschaltbild. Dieses ist in Bild 5.5 zu sehen und stellt im Folgenden das Modell für die im Versuchsstand eingesetzten Motoren dar.

<sup>1</sup>Durch Verringerung des Erregerflusses kann die Drehzahl der Maschine erhöht werden.

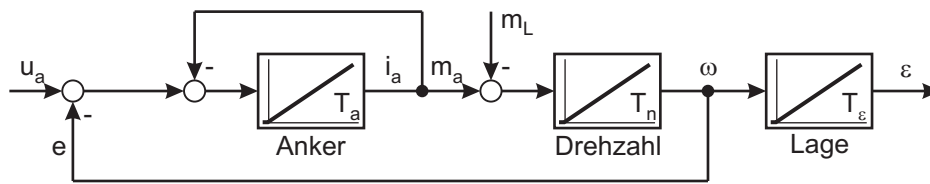


Bild 5.5: Permanenterregte Gleichstrommaschine

Es sei hier darauf hingewiesen, dass die elektrische Zeitkonstante des Motors und die in den Servoverstärkern implementierten Stromregler in der Regel wesentlich schneller als der Zweig der Rückkopplung über die Drehzahl ist. Die Rückführung der induzierten Spannung wirkt daher wie eine langsame Störung und kann für die Reglerauslegung vernachlässigt werden.

### 5.1.3 Parameterbestimmung und Normierung für die Antriebe

Nachdem das Modell des Antriebs bekannt ist, müssen die Parameter und Normierungsgrößen des Modells bestimmt werden. Diese sind zum großen Teil anhand des Datenblattes bestimmbar.

Gesucht sind dabei die Maschinenparameter aus Bild 5.5

$T_a$  : Ankerzeitkonstante

$T_n$  : Integratorzeitkonstante von Moment zu Drehzahl

$T_\varepsilon$  : Integratorzeitkonstante von Drehzahl zu Lage

sowie Normierungen für die physikalischen Größen

$u_a$  : Ankerspannung

$e$  : Induzierte Spannung

$i_a$  : Ankerstrom

$m_a$  : Antriebsmoment

$m_L$  : Lastmoment (Störgröße)

$\omega$  : Winkelgeschwindigkeit

$\varepsilon$  : Lage

Bei den eingesetzten Motoren handelt es sich um Gleichstrommotoren mit eisenlosem Rotor der Firma Maxon Motor. Die in Tabelle 5.1 dargestellten Daten wurden dem Datenblatt entnommen.

Tabelle 5.1: Motorparameter aus Datenblatt

	Bezeichnung	Einheit	Wert
1	Typenleistung	W	15
2	Nennspannung	V	24,00
3	Leerlaufdrehzahl	$\text{min}^{-1}$	5750
4	Anhaltemoment	$\text{mN m}$	119
5	Kennliniensteigung	$\text{min}^{-1} \text{mN m}^{-1}$	49,0
6	Leerlaufstrom	$\text{mA}$	26,3
7	Anlaufstrom	$\text{mA}$	3020
8	Anschlusswiderstand	$\Omega$	7,94
9	Grenzdrehzahl	$\text{min}^{-1}$	9200
10	Max. Dauerbelastungsstrom	$\text{mA}$	786
11	Max. Dauerdrehmoment	$\text{mN m}$	30,9
12	Max. Abgabeleistung bei Nennspannung	$\text{mW}$	17500
13	Max. Dauerdrehmoment	%	81,5
14	Drehmomentkonstante	$\text{mN mA}^{-1}$	39,3
15	Drehzahlkonstante	$\text{min}^{-1} \text{V}^{-1}$	243
16	Mechanische Anlaufzeitkonstante	$\text{ms}$	13,7
17	Rotorträgheitsmoment	$\text{g cm}^2$	26,6
18	Anschlussinduktivität	$\text{mH}$	1,54
19	Therm. Widerstand Gehäuse-Luft	$\text{K W}^{-1}$	12,50
20	Therm. Widerstand Rotor-Gehäuse	$\text{K W}^{-1}$	1,90

**Ankerzeitkonstante  $T_a$** 

Die Angaben des Anschlusswiderstands  $R_a$  und der Anschlussinduktivität  $L_a$  der Tabelle 5.1 liefern sofort den Maschinenparameter Ankerzeitkonstante  $T_a$ :

$$T_a = \frac{L_a}{R_a} = \frac{1,54 \text{ mH}}{7,94 \Omega} = 0,1939 \text{ ms} = 193,9 \mu\text{s} \quad (5.16)$$

**Integrierzeitkonstante  $T_n$** 

Die Integrierzeitkonstante  $T_n$  zwischen Drehmoment und Drehzahl ergibt sich aus der Trägheit  $\Theta$ , bestehend aus Motorträgheit  $\Theta_M$  und Trägheit der angebrachten Scheibe  $\Theta_S$ , sowie der Normierungsgrößen für die Winkelgeschwindigkeit und des Drehmomentes.

$$T_n = \frac{\Theta \omega_0}{m_0} \quad (5.17)$$

Als Normierung für die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  wurde hier die Leerlaufdrehzahl  $n_0$  herangezogen.

$$\omega_0 = 2\pi \frac{n_0}{60 \frac{\text{s}}{\text{min}}} = 2\pi \frac{5750 \text{ min}^{-1}}{60 \frac{\text{s}}{\text{min}}} = 602,14 \frac{1}{\text{s}} \quad (5.18)$$

Das Moment  $m_a$  wurde auf das Anhaltmoment  $m_0$  normiert.

$$m_0 = 119 \cdot 10^{-3} \text{ Nm} \quad (5.19)$$

Die Gesamtträgheit  $\Theta$  ergibt sich aus der Summe der Trägheit des Motorankers  $\Theta_M$  und der Trägheit der angebrachten Scheibe  $\Theta_S$ . Der Anker weist nach dem Datenblatt eine Trägheit von

$$\Theta_M = 26,6 \text{ g cm}^2 = 266 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2 \quad (5.20)$$

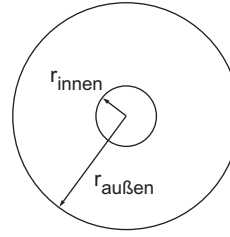
auf. Die Trägheit der Scheibe lässt sich leicht aus der Geometrie und ihrer Masse bestimmen

$$\Theta_S = \frac{1}{2} M_S (r_{\text{innen}}^2 + r_{\text{außen}}^2) , \quad (5.21)$$



wobei

$$\begin{aligned} M_S &= 14 \text{ g} \\ r_{\text{innen}} &= 7,5 \text{ mm} \\ r_{\text{außen}} &= 60 \text{ mm} \end{aligned}$$



beträgt. Die Trägheit der Scheibe ergibt sich damit zu

$$\Theta_S = 25,59 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2 \quad (5.22)$$

und die Gesamtträgheit des Systems zu

$$\Theta = \Theta_M + \Theta_S = 28,25 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2. \quad (5.23)$$

Die Integrierzeitkonstante  $T_n$  berechnet sich nach Glg. (5.17) zu

$$T_n = \frac{\Theta \omega_0}{m_0} = \frac{28,25 \cdot 10^{-6} \text{ kg m}^2 \cdot 602,14 \frac{1}{\text{s}}}{119 \cdot 10^{-3} \text{ N m}} = 142,96 \text{ ms}. \quad (5.24)$$

### Integrierzeitkonstante $T_\varepsilon$

Als letzten erforderlichen Parameter für das Streckenmodell wird die Integrierzeitkonstante  $T_\varepsilon$  von der Winkelgeschwindigkeit zur Lage benötigt. Diese Größe ergibt sich ausschließlich durch die Wahl der Normierungen zu

$$T_\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\omega_0}. \quad (5.25)$$

Für die weitere Betrachtung wird eine Normierung für die Lage von 1 Umdrehung  $= 2\pi$  gewählt. Damit ist  $\varepsilon_0 = 2\pi$  und  $T_\varepsilon$  ergibt sich zu

$$T_\varepsilon = 10,43 \text{ ms}. \quad (5.26)$$

Als weitere Normierungsgröße wurde sowohl für die Ankerspannung, als auch für die induzierte Spannung, die Nennspannung von  $U_0 = 24 \text{ V}$  gewählt.

### 5.1.4 Parameterbestimmung für die Servoverstärker

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit der mathematischen Beschreibung der Stellglieder. Als Stellglied wurde für jeden Motor ein Servoverstärker ADS 50/5 von Maxon Motor eingesetzt. Wie schon erwähnt sind die integrierten Stromregler im Gegensatz zu den Streckenzeitkonstanten so schnell, dass die dadurch verursachten Verzögerungen vernachlässigbar sind. Messungen haben ergeben, dass die Stromregelkreise in einigen zehn Mikrosekunden eingeschwungen sind. Aus diesem Grund wird hier nur das stationäre Verhalten betrachtet.

Bild 5.6 zeigt die statische Kennlinie der vier Servoverstärker. Dazu wurden über die Analogausgänge der IM178-4 verschiedene Spannungen auf die Eingänge der Servoverstärker gegeben und die Ankerspannungen gemessen.

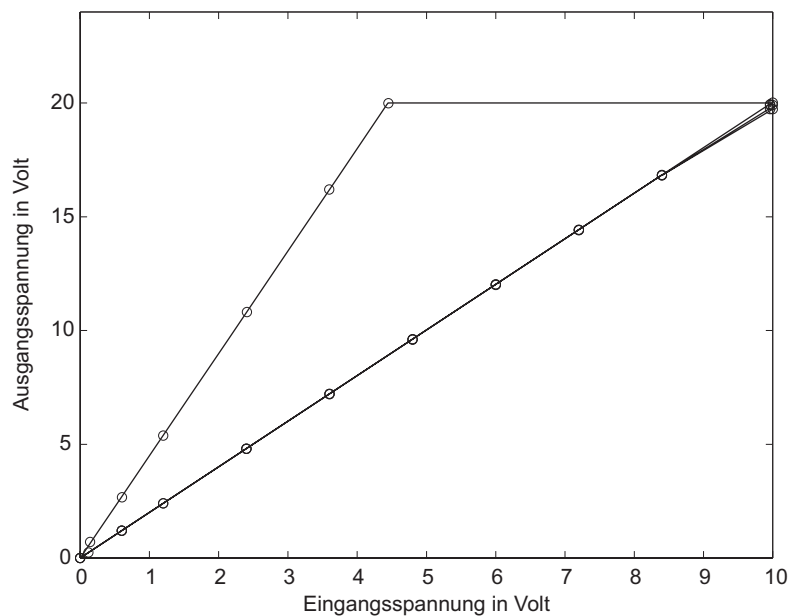


Bild 5.6: Statische Kennlinie der Servoverstärker ADS 50/5

Die drei übereinander liegenden unteren Kurven entsprechen den Stellgliedern der Slaves. Es ist deutlich zu erkennen, dass sich diese annähernd gleich verhalten und eine konstante Steigung aufweisen.

Die maximalen Ausgangsspannungen der Stellglieder betragen 19,73 V für Slave 1, 19,91 V für Slave 2 und 20,02 V für Slave 3 bei einer konstanten Eingangsspannung von 10 V. Daraus lassen sich sofort die Steigungen der Kurven bzw. die Verstärkungen der Stellglieder berechnen. Aufgrund der sehr geringen Unterschiede bei den drei Slaves wird bei der Normierung und der Implementierung der Regler eine Verstärkung von  $V_{\text{Slave}} = 2,0$  für die Slaves zugrunde gelegt.

Auffällig ist der Verlauf des Master-Servoverstärkers (obere Kurve in Bild 5.6). Es ist deutlich zu erkennen, dass das Stellglied des Masters eine höhere Verstärkung aufweist. Schon bei einer Eingangsspannung von 4,444 V wird die maximale Ausgangsspannung von 20 V erreicht. Die Verstärkung des Masters berechnet sich damit zu

$$V_{\text{Master}} = \frac{20 \text{ V}}{4,444 \text{ V}} = 4,5.$$

Für die folgenden Untersuchungen werden aufgrund der obigen Ergebnisse die Stellglieder als reine Proportional-Glieder mit den Verstärkungen

$$V_{\text{Slave}} = 2,0 \tag{5.27}$$

$$V_{\text{Master}} = 4,5 \tag{5.28}$$

und einer Begrenzung der Ausgangsgröße auf 20 V angenommen.

## 5.2 Regelung einer Gleichstrommaschine

Nachdem die Modelle der Komponenten und die erforderlichen Parameter bestimmt sind, beschäftigt sich dieser Abschnitt mit dem prinzipiellen Aufbau einer Regelung für Antriebe gemäß Bild 5.5. Hierbei wird auf den Stromregelkreis eingegangen, der hauptsächlich dem Schutz der Maschine dient. Des Weiteren wird die Möglichkeit einer Drehzahlregelung erörtert. Dabei muss auch bedacht werden, dass die Messung der Drehzahl-Istwerte nicht beliebig genau vorgenommen werden kann. Den Abschluss bilden zwei Lageregelungen, wobei die erste eine Vorgabe der Rotorposition des Motors ermöglicht. Die zweite Variante sorgt für einen Winkelgleichlauf zweier Antriebe.

In der Antriebstechnik sind Regelungen in Kaskadenstruktur üblich. Ein innerer Regelkreis erhält dabei seinen Sollwert von einem überlagerten Regler, der wiederum erhält seinerseits die Sollwerte von einem anderen überlagerten Regler. Es sei darauf aufmerksam gemacht, dass die Zeitkonstanten der einzelnen Regelkreise von innen nach außen in der Regel ansteigen.

### 5.2.1 Stromregelung

Bei praktischen Anwendungen in der Antriebstechnik existiert immer ein Stromregler, der zur Begrenzung der Ankerströme und somit zum Schutz der Maschine wichtig ist.

Die Eingangsgrößen des Stromreglers sind der Ankerstrom und der Ankerstrom-Sollwert. Die Ausgangsgröße ist die Spannung für das Stellglied.

Üblicherweise wird ein Stromregler vom Typ PI-Regler gemäß Glg. (5.29) eingesetzt.

$$K_i(s) = V_{ri} \left( 1 + \frac{1}{T_{ii} s} \right) \quad (5.29)$$

Für die Auslegung des Stromreglers kann die maschineninterne Rückkopplung der Drehzahl auf den Eingang des Ankertiefpasses vernachlässigt werden, da die Stromregelung sehr viel schneller als die Änderung der Drehzahl ist. Die Drehzahl kann daher, vom Regler aus gesehen, als konstant angenommen werden und wirkt wie eine langsame Störgröße. Die zu regelnde Strecke besteht daher aus einer Reihenschaltung von zwei Tiefpassgliedern erster Ordnung. Bild 5.7 zeigt die sich ergebende Struktur.

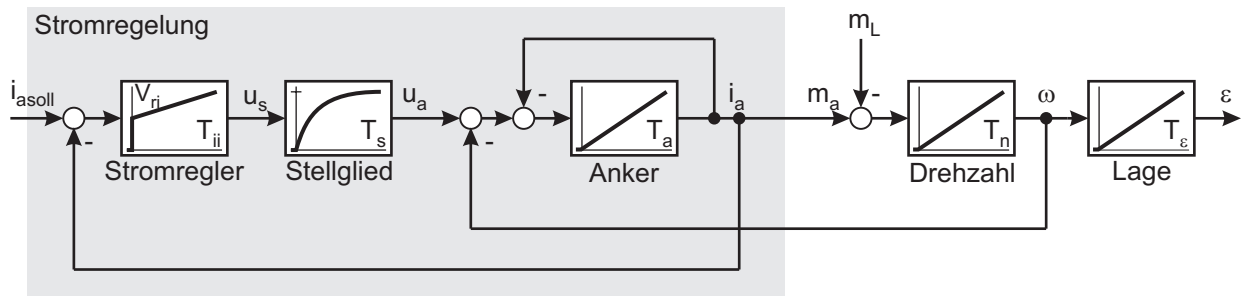


Bild 5.7: Struktur des Stromregelkreises

Der Entwurf des Reglers kann durch Standardverfahren vorgenommen werden. Dabei wird die größere Streckenzeitkonstante kompensiert, um ein möglichst schnelles System zu erhalten. Damit ergibt sich die Integrierzeitkonstante des Reglers zu

$$T_{ii} = T_a > T_s \quad (5.30)$$

und die Verstärkung zu

$$V_{ri} = \frac{T_a}{T_s} \frac{1}{4 D_g^2}, \quad (5.31)$$

wobei  $D_g$  die Dämpfung des geschlossenen Stromregelkreises beschreibt.

### 5.2.2 Drehzahlregelung

In einer der Stromregelung überlagerten Schleife wird stets ein Drehzahlregler eingesetzt, dessen Stellgröße den Sollwert für den unterlagerten Stromregelkreis darstellt. Die Eingänge des Drehzahlreglers sind die Solldrehzahl und die Istdrehzahl. Steht kein expliziter Messwert für die Drehzahl zur Verfügung, z. B. beim Einsatz von Inkrementalgebern, so muss die Drehzahl aus der Lage durch Differenzbildung berechnet werden. Dabei können Probleme auftreten, die später noch genauer beschrieben werden.

Um die Auflösung der Inkrementalgeber zu erhöhen besteht die Möglichkeit eine Flankenauswertung der Inkrementalgebersignale anzuwenden. Die Auflösung kann dadurch auf einfache Weise vervierfacht werden.

Eine weitere Möglichkeit besteht in der so genannten Hochauflösung. Dabei werden nicht nur die Impulse der Inkrementalgeber gezählt, sondern der Verlauf der Signalspannungen ausgewertet. Über eine Arcustangens-Funktion lässt sich dann sehr genau die Lage bzw. Drehzahl bestimmen.

Als Drehzahlregler wird üblicherweise ein PI-Regler nach Glg. (5.32) eingesetzt

$$K_{\omega}(s) = V_{r\omega} \left( 1 + \frac{1}{T_{i\omega} s} \right). \quad (5.32)$$

Für den Entwurf dieses PI-Reglers kann der innere Stromregelkreis, bestehend aus Stromregler, Stellglied und Ankertiefpass, durch ein Verzögerungsglied erster Ordnung angenähert werden, da der Stromregelkreis in der Regel wesentlich schneller ist, als die zu regelnden mechanischen Streckenteile.

Bild 5.8 zeigt das für den Reglerentwurf verwendete vereinfachte Blockschaltbild, bei dem der innere Stromregelkreis durch ein Ersatz-PT1 mit der Zeitkonstante  $T_{ei}$  angenähert wurde.

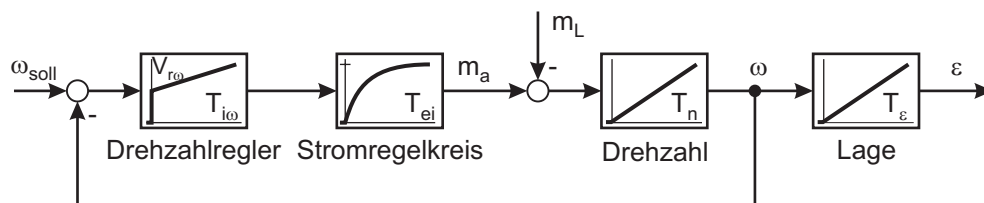


Bild 5.8: Für den Reglerentwurf verwendetes vereinfachtes Modell

Bild 5.9 stellt der Vollständigkeit halber das gesamte Blockschaltbild der Kaskade bestehend aus Drehzahl- und Stromregler dar.



Der Entwurf des Drehzahlreglers kann nach dem Prinzip des symmetrischen Optimums erfolgen [43]. Die Reglerparameter ergeben sich nach Vorgabe der Dämpfung  $D_g$  zu

$$V_{r\omega} = \frac{1}{a} \frac{T_n}{T_{ei}} \quad \text{und} \quad T_{i\omega} = a^2 T_{ei} \quad \text{mit} \quad a = 2 D_g + 1. \quad (5.33)$$

### 5.2.3 Lageregelung

Um eine bestimmte vorgebbare Position anfahren zu können, ist es erforderlich, dem Drehzahlregler eine weitere Kaskade zu überlagern. Diese enthält einen Lageregler, der üblicherweise als P-Regler gemäß Glg. (5.34) realisiert wird.

$$K_\varepsilon(s) = V_{r\varepsilon} \quad (5.34)$$

Im Gegensatz zum Drehzahlregler kann hier der innere Regelkreise, bestehend aus Drehzahlregler, angenähertem Verzögerungsglied erster Ordnung für den innersten Stromregelkreis und Integrator zur Drehzahl, nicht zusammengefasst und durch ein Verzögerungsglied erster Ordnung angenähert werden. Dies liegt darin begründet, dass der Drehzahlregler durch die Methode des symmetrischen Optimums entworfen wurde. Prinzipbedingt liefert ein solcher Entwurf einen geschlossenen Kreis mit Regelfläche null. Damit verbunden kann kein Ersatzglied erster Ordnung angegeben werden, da dessen Zeitkonstante null wäre.

Der Entwurf des Lagereglers muss daher am vollständigen System, bestehend aus Drehzahlregelkreis, Lageregler und Integrator zur Lage, vorgenommen werden. Der Reglerparameter  $V_{r\varepsilon}$  kann in diesem Fall durch minimieren der Regelfläche des geschlossenen Kreises bestimmt werden. Die dem Reglerentwurf zugrunde liegende Struktur ist in Bild 5.10 angegeben.

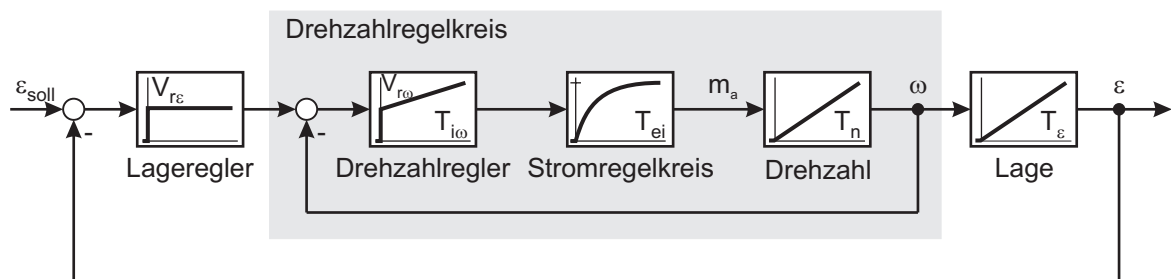


Bild 5.10: Vereinfachtes Blockschaltbild zum Entwurf eines Lagereglers

In Bild 5.11 ist der Vollständigkeit halber das komplette Modell einer Lageregelung für eine permanentenerregte Gleichstrommaschine zu sehen.

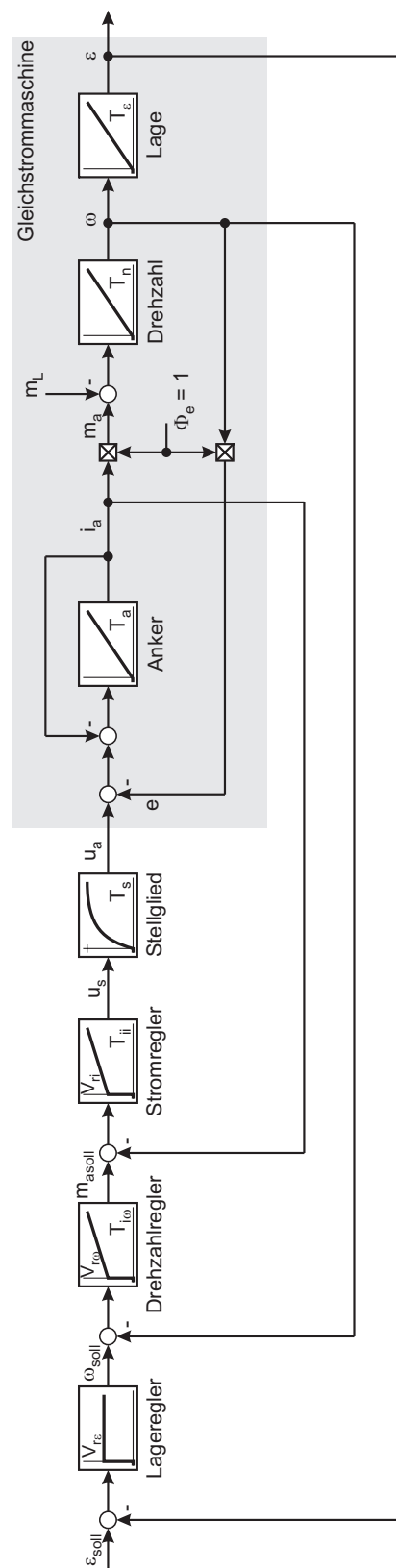


Bild 5.11: Vollständiges Modell einer Lageregelung für eine permanenterregte Gleichstrommaschine



### 5.2.4 Differenzlageregelung zweier Antriebe

Für den Fall, dass mehrere Antriebe auf Winkelgleichlauf geregelt werden sollen, ist es sinnvoll nicht jeden Antrieb einzeln auf die geforderte Lage zu regeln, sondern statt dessen spezielle Differenzlageregler einzuführen. Bei dem untersuchten Prüfstand bestand die Aufgabe drei Slave-Motoren auf Winkelgleichlauf zu einem Master-Motor zu regeln. Ein Strukturbild der Anordnung der Antriebe wurde in Bild 4.1 vorgestellt.

Der Master-Motor in der Mitte erhält dabei einen Drehzahl-Sollwert  $\omega_M \stackrel{!}{=} \omega_{\text{so}}ll$ , der für alle Motoren gelten soll und damit die Drehzahl für die ihn umgebenden drei Slave-Motoren  $\omega_{S1} \stackrel{!}{=} \omega_{S2} \stackrel{!}{=} \omega_{S3} \stackrel{!}{=} \omega_M$  vorgibt.

Es liegt daher der Gedanke nahe, für jeden Motor einen Drehzahlregler zu implementieren, der sicherstellt, dass alle Motoren mit gleicher Winkelgeschwindigkeit laufen. Sind schon Unterschiede in den Winkelgeschwindigkeiten der einzelnen Motoren vorhanden, so kann an ein Winkelgleichlauf gar nicht erst gedacht werden.

Sollen die einzelnen Motoren nicht nur gleich schnell, sondern zusätzlich noch synchron, also mit gleicher Winkellage umlaufen, so sind weitere Regler notwendig. Die einfachste Möglichkeit besteht darin, den Versatz  $\Delta_{\varepsilon i} = \varepsilon_{Si} - \varepsilon_M$  der Lagen der drei Slave-Motoren zu der Lage des Masters zu bestimmen und mit einem Differenzlageregler (Versatzregler) zu beeinflussen.  $i$  steht darin für die Nummer des betrachteten Slave-Motors mit  $i = 1 \dots 3$ . Damit ist es möglich einen einstellbaren Winkelversatz  $\Delta_{\varepsilon i}$  der Antriebe untereinander einzuprägen. Dazu muss jeder Slave-Motor eine übergeordnete Kaskade erhalten, die je nach Versatz einen zusätzlichen Drehzahl-Sollwert  $\omega_{\text{zus}}$  auf ihren Drehzahlregler aufschaltet.

Wie schon bei der Lageregelung reicht auch für die Differenzlageregelung ein reiner Proportionalregler gemäß Glg. (5.35) aus.

$$K_{\Delta}(s) = V_{r\Delta} \quad (5.35)$$

Der Reglerparameter  $V_{r\Delta}$  kann durch Minimieren der Regelfläche des geschlossenen Kreises bestimmt werden.

Für die weiteren Untersuchungen reicht die Struktur, bestehend aus einem Master-Motor und einem Slave-Motor aus, da alle Slaves das gleiche Regelschema aufweisen und eine Erweiterung auf beliebig viele Slaves trivial ist. Bild 5.12 zeigt die sich ergebende Reglerstruktur,

welche einen vorgebbaren Winkelversatz zweier Antriebe bei gleicher Drehzahl einstellt. Die inneren Stromregelkreise wurden der Einfachheit halber im Bild durch je eine Ersatzzeitkonstante  $T_{eiM}$  bzw.  $T_{eiS}$  dargestellt.

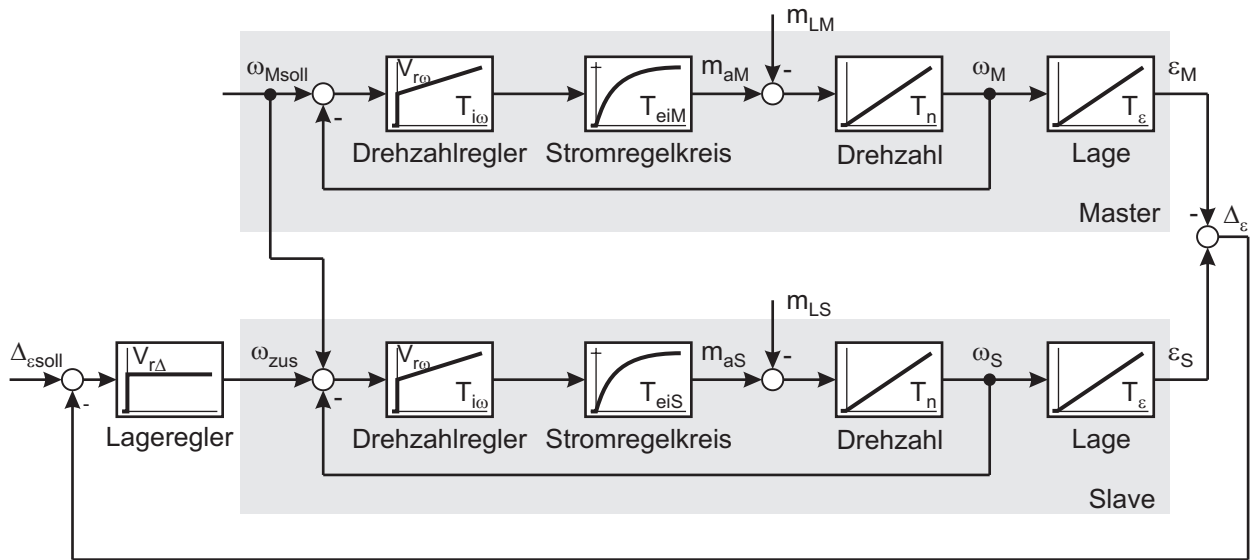


Bild 5.12: Blockschaltbild einer Differenzlageregelung

### 5.2.5 Differenzlageregelung zweier Antriebe mit zusätzlicher Lageregelung für den Master

Falls die vier Motoren eine bestimmte vorgebbare Sollposition direkt anfahren sollen, muss zusätzlich der in Abschnitt 5.2.3 beschriebene Lageregler für den Master implementiert werden.

Aufgrund der bereits implementierten Versatzregler für die Slaves reicht es aus, einen Lageregler für den Master zu realisieren, da die Slaves ohnehin der Lage des Masters folgen.

Die so entstehende Struktur ist in Bild 5.13 zu sehen und enthält als einzigen Unterschied einen zusätzlichen Regler, der ausgehend von der Abweichung der Lage des Masters von der Sollposition einen Drehzahl-Sollwert  $\omega_{soll}$  ausgibt.



### 5.3 Reglerparametrierung für den Versuchsstand

Nachdem die grundlegende Reglerstruktur in den vorhergehenden Abschnitten dargestellt wurde, wird jetzt speziell auf den verwendeten Versuchsstand eingegangen. Dazu zählt auch explizit die Bestimmung der Reglerparameter, also der Reglerentwurf. Auf die Implementierung der Algorithmen in der SPS wird ebenfalls näher eingegangen. Bild 5.14 zeigt die hier zugrundegelegte Struktur des Versuchsstandes.

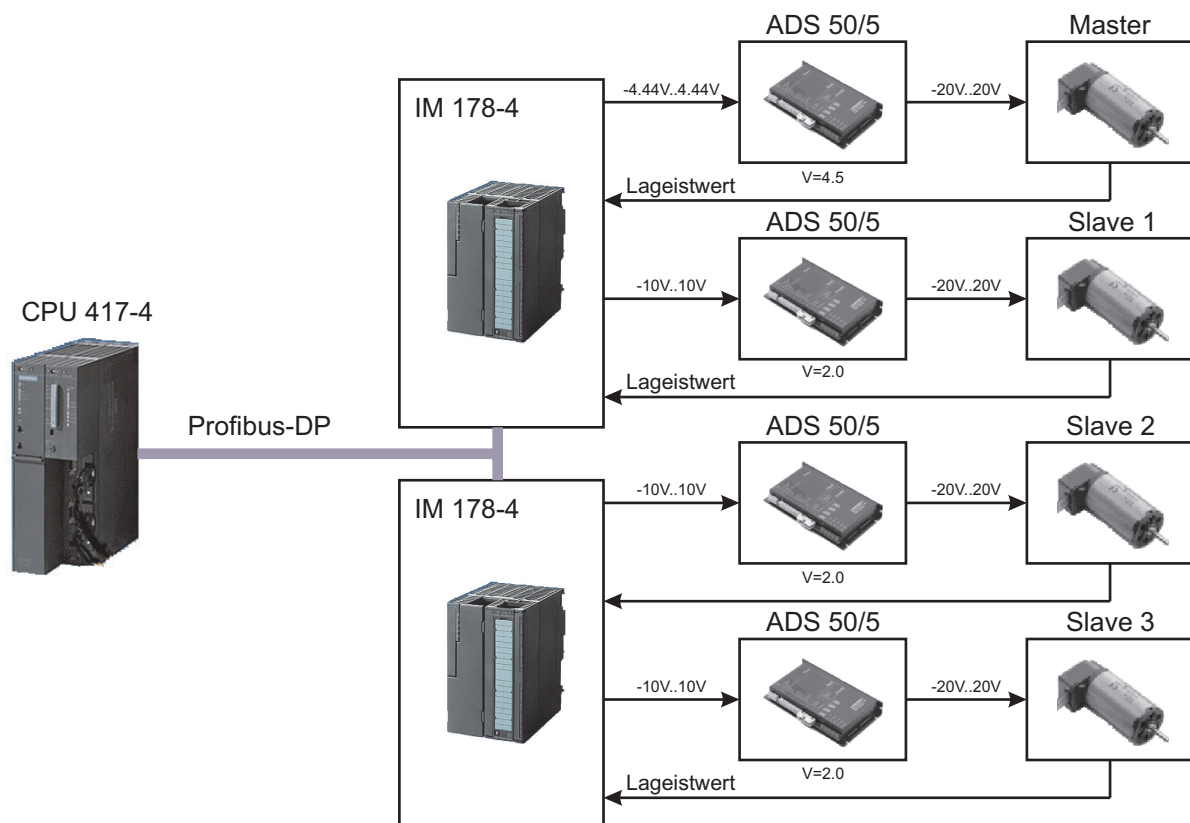


Bild 5.14: Schema der Reglerstruktur

Die Inkrementalgeber der Motoren stellen einen Lage-Istwert mit 2000 Inkrementen pro Umdrehung zur Verfügung. Dieser wird über den Profibus-DP an die CPU übermittelt.

Die Stellgrößen der Regler werden an die Busankopplungen IM178-4 ebenfalls über den Profibus-DP übertragen. Dabei ist darauf zu achten, dass die Analogausgänge eine Spannung von  $\pm 10\text{ V}$  zur Verfügung stellen können. Dieser Wert ist damit ein Normierungswert für die Stellgröße.

Es ist weiterhin darauf zu achten, dass die Stellglieder eine Verstärkung ungleich eins aufweisen. Die Slave-Stellglieder besitzen einen Verstärkungsfaktor von  $V_{\text{Slave}} = 2,0$ , wogegen

der Servoverstärker des Masters einen Faktor von  $V_{\text{Master}} = 4,5$  besitzt. Da die Stellglieder einen integrierten Stromregler besitzen, ist dieser nicht softwaretechnisch zu realisieren.

Da durch die Verluste an den Stellgliedern maximal 20 V als Ankerspannung zur Verfügung stehen, muss die Stellgröße auf 20 V begrenzt werden.

Die berechneten Drehzahl-Istwerte werden, wie auch die Drehzahl-Sollwerte, auf die Leerlaufdrehzahl  $n_0$  normiert.

Ein normierter Reglereingang (Regelfehler) von eins entspricht damit einer Drehzahldifferenz von  $5750 \text{ min}^{-1}$ , ein normierter Reglerausgang (Stellgröße) von eins entspricht dagegen einer Ankerspannung von 24 V. Dies wird durch die oben angegebenen Normierungsgrößen berücksichtigt.

### 5.3.1 Entwurf der Drehzahlregler

Für den Entwurf der Drehzahlregler wurde das in Bild 5.9 eingeführte Blockschaltbild zugrunde gelegt. Die Reglerparameter des PI-Reglers für den Versuchsstand wurden durch quasi kontinuierlichen Entwurf zu

$$V_{r\omega} = 4,718 \quad (5.36)$$

$$T_{i\omega} = 82,51 \text{ ms} \quad (5.37)$$

bestimmt. Die kontinuierliche Übertragungsfunktion des Reglers im  $s$ -Bereich ist durch

$$K_{\omega}(s) = V_{r\omega} \frac{T_{i\omega} s + 1}{T_{i\omega} s} = V_{r\omega} \left( 1 + \frac{1}{T_{i\omega} s} \right) \quad (5.38)$$

gegeben. Die rechte Seite von Glg. (5.38) stellt den Regler in Parallelstruktur bestehend aus Proportional- und Integral-Term dar und ist als solche,  $z$ -transformiert, in der SPS implementiert.

Die Eingänge des Reglers – Sollwert und Istwert – sind dabei auf die Leerlaufwinkelgeschwindigkeit bzw. die Leerlaufdrehzahl  $n_0 = 5750 \text{ min}^{-1}$  zu normieren.

Der Drehzahl-Istwert wird aus den letzten beiden Lage-Istwerten des Inkrementalgebers durch Differenzbildung berechnet, da keine Drehzahlinformation auf dem Profibus zur Verfügung steht. Bei der Differenzbildung kann es zu unerwünschten Effekten kommen, auf die in Abschnitt 6.1.2 näher eingegangen wird. Abhilfen werden dort ebenfalls vorgeschlagen.

Die Normierung der Ausgangsgröße des Reglers – Stellgröße – ist so vorzunehmen, dass ein normierter Reglerausgang von 1 eine Ankerspannung von 24 V hervorruft, da die Spannungen für den Reglerentwurf auf 24 V normiert wurden.

Bei den verwendeten Komponenten ist eine maximale Spannung von 20 V realisierbar, sodass eine reglerinterne Begrenzung der normierten Stellgröße auf  $20/24 = 0,8333$  sichergestellt werden muss.

Bild 5.15 zeigt das Blockschaltbild des im Versuchsstand implementierten zeitdiskreten PI-Reglers mit dynamischer Begrenzungsanpassung. Die Überführung der kontinuierlichen Reglerübertragungsfunktion aus Glg. (5.38) in den zeitdiskreten Bereich erfolgte dabei mittels der  $z$ -Transformation.

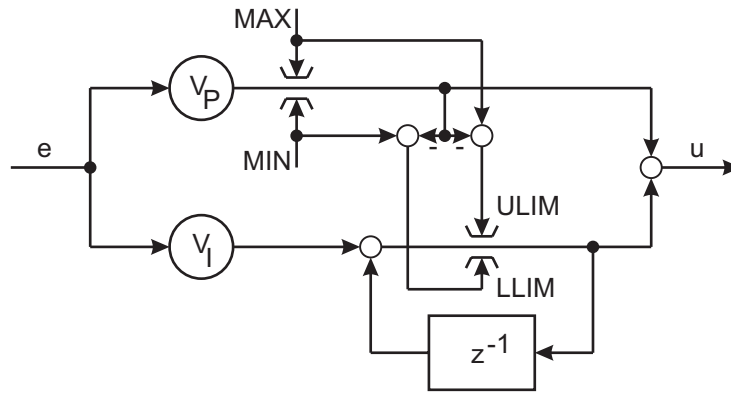


Bild 5.15: Implementierter diskreter Drehzahlregler mit Begrenzungen

Der Ausgang  $u$  stellt die normierte Stellgröße dar. Die Größe  $e$  entspricht dem normierten Regelfehler, also der durch  $n_0$  geteilten Differenz aus Sollwert und Istwert der Drehzahlen.

MIN und MAX ist die untere bzw. obere absolute Begrenzung für die Stellgröße. LLIM bzw. ULIM sind die dynamisch angepassten Begrenzungen des Integralzweigs. Die Faktoren  $V_P$  und  $V_I$  beinhalten die Reglerparameter sowie die Abtastzeit  $T_0$ .

$$V_P = V_{rw} \quad (5.39)$$

$$V_I = V_{rw} \frac{T_0}{T_{iw}} \quad (5.40)$$

Die Übertragungsfunktion im zeitdiskreten  $z$ -Bereich ergibt sich damit zu

$$K(z) = V_P + V_I \frac{z}{z-1} = V_{rw} \frac{\left(1 + \frac{T_0}{T_{iw}}\right) z - 1}{z-1}. \quad (5.41)$$

Die implementierten Regler laufen mit einer Abtastzeit von  $T_0 = 4 \text{ ms}$ .

### 5.3.2 Entwurf der Differenzlageregler

Beim Einsatz der im vorherigen Abschnitt beschriebenen Drehzahlregler wird zwar sichergestellt, dass die vier Motoren mit gleicher Winkelgeschwindigkeit laufen, durch kleine Unterschiede im Anlauf oder durch Störungen kann es aber dazu kommen, dass sich ein Winkelversatz einstellt.

Um einen Winkelgleichlauf auch im Falle von sowohl Modellunterschieden als auch Störungen sicherstellen zu können, ist es notwendig einen zusätzlichen Regler zu implementieren, der den Winkelversatz im Bezug auf die Lage des Master-Motors zu null regelt.

Für den Entwurf der Differenzlageregelung wird das in Bild 5.12 eingeführte Blockschaltbild zugrunde gelegt.

Da die Strecke integrierendes Verhalten aufweist, ist ein Proportional-Regler für stationäre Führungsgenauigkeit ausreichend. Der notwendige P-Regler wurde in der SPS implementiert und regelt den Winkelversatz  $\Delta_\varepsilon = \varepsilon_S - \varepsilon_M$  zwischen Slave und Master zu null.

Der Reglerausgang des Versatzreglers  $\omega_{\text{zus}}$  wird dem unterlagerten Drehzahlregelkreis der Slaves als zusätzlicher Sollwert aufgeschaltet und ergibt sich zu

$$\omega_{\text{zus}} = V_{r\Delta} (\Delta_{\varepsilon \text{ soll}} - \Delta_\varepsilon), \quad (5.42)$$

wobei  $\Delta_\varepsilon$  die Lagedifferenz von Slave- und Master-Motor darstellt.  $\Delta_{\varepsilon \text{ soll}}$  ist der gewünschte Winkelversatz, der im Falle des Prüfstandes verschwinden soll ( $\Delta_{\varepsilon \text{ soll}} = 0$ ).

Die Reglerverstärkung  $V_{r\Delta}$  des implementierten Reglers ergibt sich zu

$$V_{r\Delta} = 0,1. \quad (5.43)$$

### 5.3.3 Entwurf des Lagereglers

Für die Positionsvorgabe wird zusätzlich zu den Drehzahlreglern für den Master und die Slaves und den Versatzreglern der Slaves ein Lageregler für den Master eingeführt. Die dem Entwurf zugrunde gelegte Reglerstruktur ist im Blockschaltbild 5.13 dargestellt. Der benötigte Lageregler wurde in der SPS ebenfalls als Proportional-Regler implementiert.

Der Reglereingang für den Lageregler ist die Differenz aus Sollwinkel  $\varepsilon_{\text{soll}}$  und Istwinkel des Masters  $\varepsilon_M$ . Die Stellgröße  $\omega_{M\text{soll}}$  berechnet sich gemäß

$$\omega_{M\text{soll}} = V_{r\varepsilon}(\varepsilon_{\text{soll}} - \varepsilon_M), \quad (5.44)$$

wobei  $V_{r\varepsilon}$  die Reglerverstärkung bezeichnet und sich beim implementierten Regler zu

$$V_{r\varepsilon} = 0,1 \quad (5.45)$$

ergibt.



## 6 Ergebnisse

Nachdem der Versuchsaufbau bekannt ist, das Regelkonzept vorgestellt und die Regler parametrisiert sind, stellt dieses Kapitel die erhaltenen Ergebnisse in Form von Simulationen und Messungen am Versuchsstand vor. Dazu werden zu jedem Regler der Kaskade Simulationen gefolgt von realen Messungen vorgestellt, um die korrekte Funktion des Systems zu zeigen. Anschließend werden die Ergebnisse des entwickelten Verfahrens zur Stabilitätsuntersuchung bei veränderlicher Abtastzeit anhand dieses Versuchsstandes vorgestellt und erläutert.

### 6.1 Drehzahlregelkreis

Vor einem Einsatz der berechneten Regler in der Praxis ist es ratsam, ihre Funktion anhand von Simulationen zu überprüfen. Dazu wird der Drehzahlregelkreis und der unterlagerte Stromregelkreis zusammen mit dem in Abschnitt 5.1.2 entwickelten Modell einer permanentenregten Gleichstrommaschine simuliert. Als Parameter für den Motor werden die in Abschnitt 5.1.3 berechneten Werte verwendet. Die Regelparameter ergeben sich gemäß Abschnitt 5.3.

Die Simulationsergebnisse werden anschließend mit den in der Praxis aufgenommenen Messwerten verglichen. Dies wird jeweils für den synchronen Betrieb und den asynchronen Betrieb durchgeführt.

Als Simulationstool wird hier Advanced Continuous Simulation Language (ACSL) verwendet [2]. ACSL ermöglicht es in einfacher Art und Weise zeitdiskrete und kontinuierliche Systeme zu kombinieren und dabei auch zur Laufzeit der Simulation die Abtastzeiten und Buslaufzeiten zu verändern. Das Tool ist geeignet, sowohl den synchronen als auch den asynchronen Betrieb zu realisieren und auch die Effekte des Jitterns komfortabel abzubilden. Die Quantisierungseffekte der A/D- und D/A-Umsetzer wurden bei den Simulationen ebenfalls berücksichtigt.

### 6.1.1 Simulationsergebnisse – synchroner Betrieb

Die folgenden Simulationen wurden für den synchronen Betrieb ausgeführt, es existiert daher kein Jittern. Bei der Simulation wurde sichergestellt, dass zu den Regleraufrufzeiten die zeitlich richtigen Messwerte zur Verfügung stehen. Die Abtastzeit  $T_0$  beträgt konstant 4,0 ms. Die Ist-drehzahl wird durch Differenzbildung des aktuellen und des vorherigen Lage-Istwertes gebildet. Auf jegliche Art von Filterung wurde verzichtet. Die auf 24 V normierte Stellgröße des Drehzahlreglers ist auf 0,8333 beschränkt, was einer physikalischen Ankerspannung von 20 V entspricht. Dies ist auch die maximale Spannung, welche die Servoverstärker bei einer Betriebsspannung von 24 V sicher erreichen.

Bild 6.1 zeigt die simulierte Ist-drehzahl des Masters in  $\text{min}^{-1}$ . Auf eine Darstellung der Slave-Drehzahl wurde hier verzichtet, da diese bei den idealen Simulationsvoraussetzungen mit der Drehzahl des Masters identisch ist. Als Sollwerte wurden Sprünge auf 4096, 2048 und 512  $\text{min}^{-1}$  gewählt, welche als gestrichelte Linien dargestellt sind.

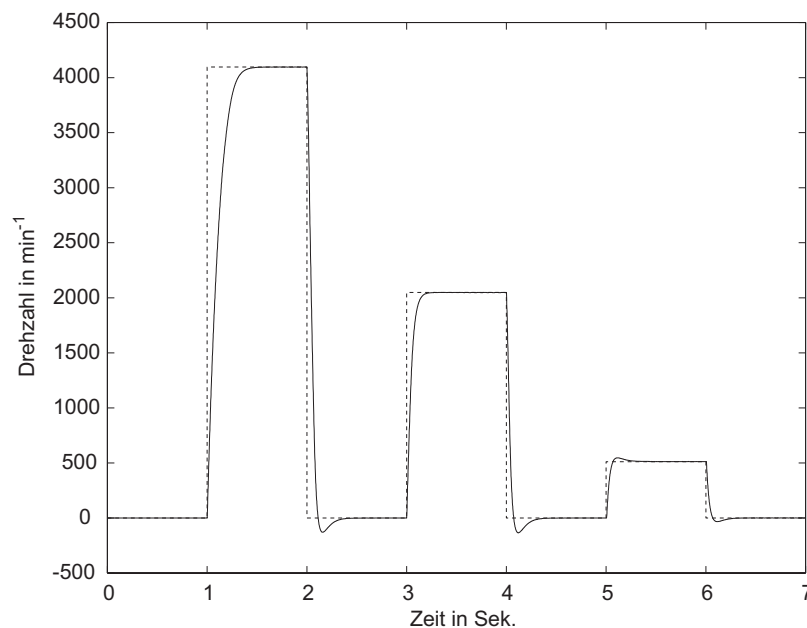


Bild 6.1: Drehzahl des Master-Motors in  $\text{min}^{-1}$  bei synchronem Betrieb

Bild 6.2 stellt als zugehörige Stellgröße die Ankerspannung  $U_a$  in Volt dar. Auch hier wird nur der Verlauf des Masters dargestellt.

In allen folgenden Diagrammen ist die Drehzahl in  $\text{min}^{-1}$  dargestellt. Die Ankerspannung wird stets in Volt aufgetragen.

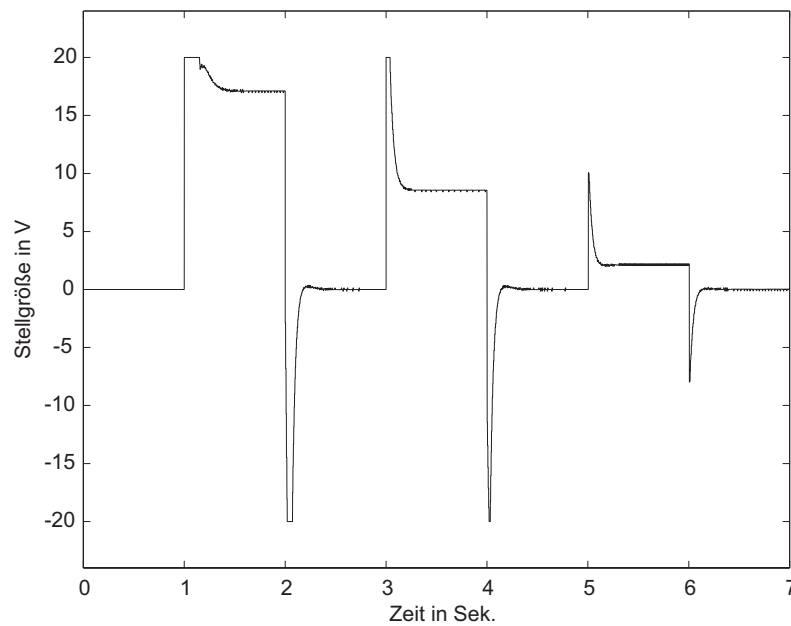


Bild 6.2: Stellgröße des Drehzahlreglers für den Master-Motor in Volt

Es ist zu erkennen, dass die Stellgröße bei den ersten beiden Sprüngen auf  $4096 \text{ min}^{-1}$  bzw.  $2048 \text{ min}^{-1}$  in die Begrenzung geht. Diese liegt bei  $20 \text{ V}$ . Aufgrund dieser einsetzenden Begrenzung ist der Regelkreis für die Dauer der aktivierten Begrenzung offen. Es kann daher zu unerwünschtem Einschwingverhalten kommen, da die Regelung in dieser Zeit inaktiv ist und konstant den maximalen Stellwert ausgibt. Erst wenn die Begrenzung nicht mehr aktiv ist, geht das System wieder in einen geregelten Zustand über.

Da die Stellgröße nur sehr kurz in die Begrenzung geht, stellt dies kein Problem dar. Bei Anwesenheit von Störungen oder Modellfehlern kann es aber vorkommen, dass den Reglern bei großen Sollwertvorgaben nicht genug Stellgrößenreserve zur Verfügung steht und sie somit nicht in der Lage sind, den Endwert zu erreichen. Darauf wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels noch näher eingegangen.

Im Vergleich zu den eben angenommenen idealen Simulationsbedingungen, soll nun das Verhalten am realen System untersucht werden.

### 6.1.2 Messwerte – synchroner Betrieb

Für die Untersuchung des realen Systems bei synchronem Betrieb werden die gleichen Regler eingesetzt, wie sie in der Simulation verwendet wurden. Das folgende Bild 6.3 zeigt die aus den Lage-Istwerten durch Differenzbildung zweier aufeinander folgender Werte ermittelten

Drehzahlen. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass es sich hierbei nicht um die Ist-drehzahlen des physikalischen Systems handelt, sondern um gemessene Werte. Nebeneffekte wie Jittern oder verlorene Messwerte können starke Verfälschungen in den Werten verursachen, welche das physikalische System nicht aufweist.

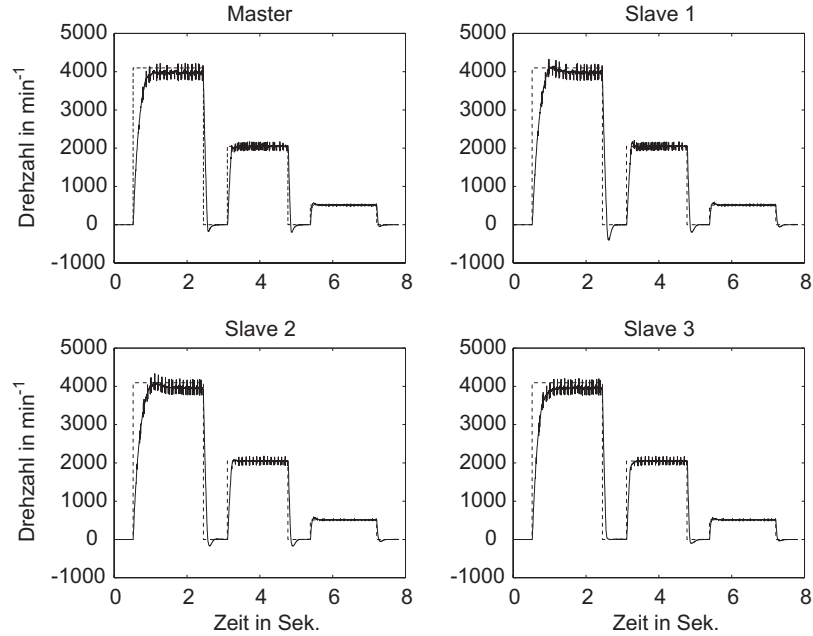


Bild 6.3: Berechnete Drehzahlen der Motoren in  $\text{min}^{-1}$  bei synchronem Betrieb

Es ist zu erkennen, dass die Verläufe mit denen der Simulation, bis auf die Peaks und einer stationären Abweichung für große Drehzahlen, gut übereinstimmen.

Das Auftreten der Peaks kann durch leichtes Jittern in der Messwerterfassung erklärt werden. Die Inkrementalgeber liefern 2000 Impulse pro Umdrehung. Damit ergibt sich die Drehzahl aus der Differenz zweier aufeinander folgender Lage-Istwerte zu

$$n = (\varepsilon_{\text{neu}} - \varepsilon_{\text{alt}}) \cdot 250 \cdot 60 / 2000, \quad (6.1)$$

wobei  $\varepsilon$  die Lageinformation in Inkrementen ist. Die Zahl 250 entspricht der Anzahl der Abtastungen pro Sekunde, also  $1/T_0$ . Die 60 steht für die Umrechnung von Umdrehungen pro Minute in Umdrehungen pro Sekunde und die 2000 ist die Anzahl der Inkremente pro Umlauf.

Die theoretische Auflösung der Drehzahl ergibt sich so zu

$$\text{Drehzahlaufösung} = \frac{1 \cdot 250 \cdot 60}{2000} = 7,5 \text{ min}^{-1}. \quad (6.2)$$

Bei idealer synchroner Messwerterfassung erhält man dadurch eine Drehzahlschwankung von  $7,5 \text{ min}^{-1}$ . Ist die Messwerterfassung nicht ganz ideal – Messung der Lage-Istwerte bei Anwesenheit eines kleinen Jitterns  $T_{\text{Jitter}}$  – so ergeben sich für die gemessene Drehzahl Schwankungen in Abhängigkeit von der aktuellen Drehzahl  $n$ . Der „Worst Case“-Fall einer Zeitverzögerung bei einem Jittern um  $T_{\text{Jitter}}$  liegt bei  $2 T_{\text{Jitter}}$ . Es kann vorkommen, dass ein Messwert sehr früh erfasst wurde ( $-T_{\text{Jitter}}$ ) und ein nachfolgender Wert sehr spät ( $+T_{\text{Jitter}}$ ). Damit ergibt sich eine Differenz von  $2 T_{\text{Jitter}}$ . Rechnet man dies in Inkremente pro  $2 T_{\text{Jitter}}$  um, so ergibt sich die Abweichung  $I_{\text{Abw}}$  in Inkrementen, in Abhängigkeit von der Drehzahl und der Größe des Jitterns zu

$$I_{\text{Abw}} = \underbrace{\frac{n \cdot 2000}{60}}_{\text{Inkr. pro Sek}} 2 T_{\text{Jitter}} . \quad (6.3)$$

Um das Jittern in unserem Fall überschlagsmäßig zu bestimmen, sind in dem folgenden Bild 6.4 Messwerte für die Drehzahl bei verschiedenen konstanten Anregungen aufgezeichnet. Dabei findet keine Regelung statt.

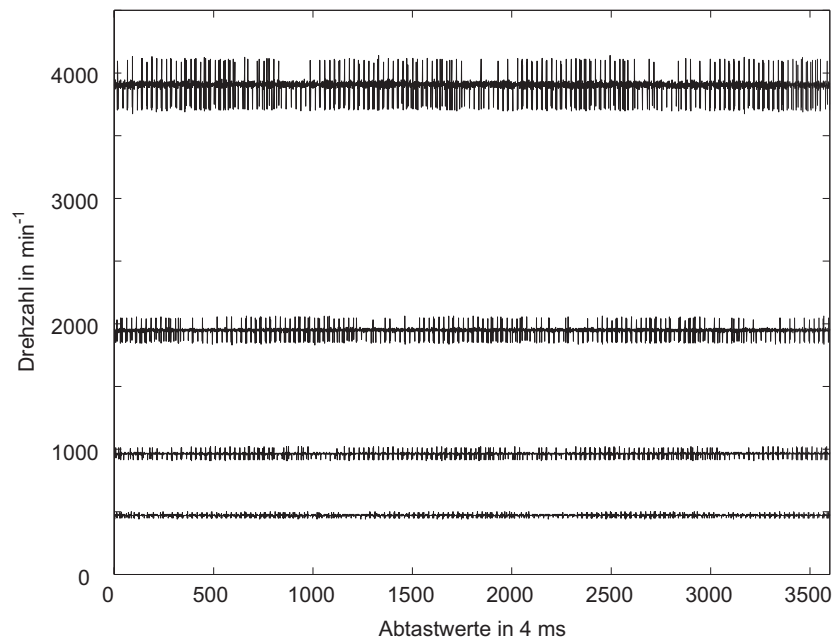


Bild 6.4: Messwerte der Drehzahl bei konstanten Anregungen

Die Mittelwerte der vier Kurven stellen den tatsächlichen Istwert dar. Aufgrund der maximalen Abweichung von diesem Wert lässt sich eine theoretische Jitterbreite ermitteln. Die folgende Tabelle gibt die Mittelwerte, maximale obere bzw. untere Abweichung, sowie die Standardabweichung der Messwerte an.

Tabelle 6.1: Charakteristische Merkmale der Messwerte bei konstanter Anregung

Nr.	Mittelwert	max. pos. Abw.	max. neg. Abw.	Standardabweichung
1	3899,9	240,1	224,9	71,8
2	1946,2	115,8	116,2	34,7
3	962,6	57,4	55,6	17,9
4	472,2	29,8	30,2	9,2

Mittelt man die maximalen positiven und negativen Abweichungen für jeden Messwertsatz, so lässt sich eine theoretische Jitterbreite für die vier Fälle bestimmen:

$$T_{\text{Jitter}1} = 127,1 \mu\text{s}$$

$$T_{\text{Jitter}2} = 117,4 \mu\text{s}$$

$$T_{\text{Jitter}3} = 119,2 \mu\text{s}$$

$$T_{\text{Jitter}4} = 119,2 \mu\text{s}$$

$$\Delta I = \frac{\Delta n}{7,5}$$

$$\frac{n \cdot 2000}{60} \cdot 2 T_{\text{Jitter}} = \Delta I$$

$$\Rightarrow T_{\text{Jitter}} = \frac{60}{2000 \cdot 2} \frac{\Delta n}{n} \frac{1}{7,5}$$

Eine mittlere Jitterzeit lässt sich damit zu

$$T_{\text{Jitter}} = \overline{T_{\text{Jitter}i}} = 120,7 \mu\text{s} \approx 120 \mu\text{s} \quad (6.4)$$

angeben.

Die Peaks in den Messwerten der Drehzahl aus Bild 6.3 sind daher nicht durch die Regler verursacht, sondern durch leichtes Jittern in der Messwerterfassung. Diese Peaks verursachen allerdings heftige Reglerreaktionen, da dieser von einer Abweichung des Istwertes vom Sollwert ausgeht.

Dies ist in Bild 6.5 verdeutlicht, indem es die zu Bild 6.3 zugehörigen Stellgrößen darstellt.

Es ist gut das Einsetzen der Begrenzung bei den ersten beiden Sprüngen erkennbar. Bei einem Sollwertsprung auf  $4096 \text{ min}^{-1}$  stößt die Stellgröße wiederholt an die obere Begrenzung. Der Regler hat in diesem Arbeitspunkt nicht genug Stellwertreserve, um die vermeintlichen Regelabweichungen zu beseitigen. Dies ist auch der Grund für den stationären Fehler der Drehzahl in Bild 6.3 beim Sollwertsprung auf  $4096 \text{ min}^{-1}$ .

Als Abhilfe könnten Stellglieder eingesetzt werden, die größere Ausgangsspannungen liefern können. Der Weg über die Veränderung der Stellglieder ist natürlich mit Hardwareaufwand

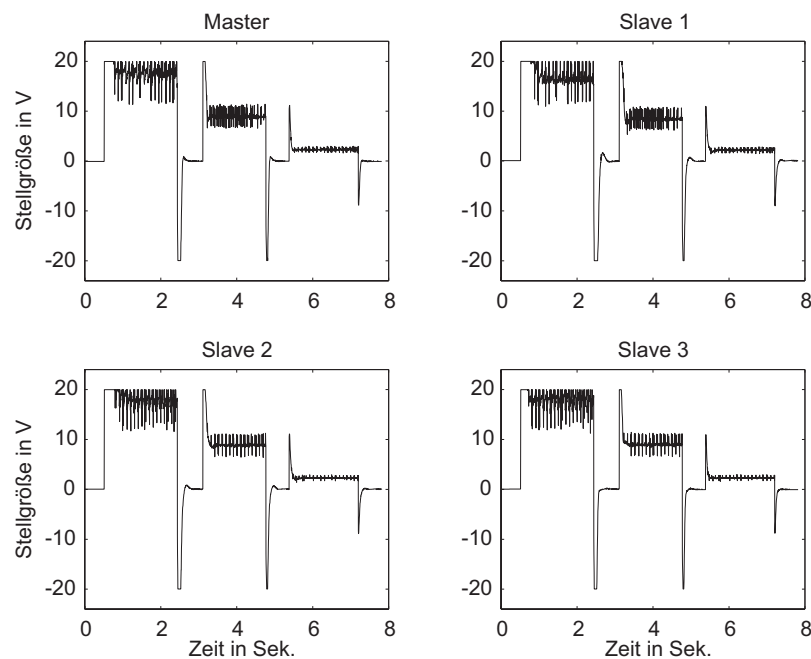


Bild 6.5: Stellgrößen der Drehzahlregler in Volt bei synchronem Betrieb

verbunden. Will man den nicht betreiben, so kann auch versucht werden, den berechneten Drehzahl-Istwert zu filtern, was im Folgenden beschrieben ist.

### 6.1.3 Filterung

Um den Regler ruhiger werden zu lassen, kann als einfachste Lösung eine einfache Tiefpassfilterung der Messwerte vorgenommen werden. Diese hat allerdings eine Verlangsamung des Gesamtsystems zur Folge und scheidet daher im Rahmen dieser Arbeit aus. Hier wird statt dessen ein nichtlineares Filter eingesetzt, das genau auf das vorliegende Problem zugeschnitten ist.

Da die Effekte des Jitterns nicht ständig auftreten und im Mittel die richtige Istdrehzahl berechnet wird, abgesehen von Ausreißern nach oben und nach unten, wird ein Filter eingesetzt, das lediglich den aktuellen und die letzten vier Messwerte verwendet. Die zwei größten und die zwei kleinsten Werte werden vernachlässigt und der mittlere Wert als gültiger Messwert herangezogen. Damit kann erreicht werden, dass sowohl die Ausreißer nach oben als auch nach unten eliminiert werden. Im Gegensatz zu einem Tiefpassfilter hat das nichtlineare Filter kein Gedächtnis, und Ausreißer haben spätestens nach fünf Takten gar keinen Einfluss mehr auf das Ergebnis. Bei Tiefpassfiltern können große Störimpulse für eine sehr lange Zeit Einfluss auf den Ausgang nehmen.

Das nichtlineare Filter wurde in der SPS realisiert und sortiert in einem ersten Durchlauf die fünf übergebenen Werte der Größe nach. Anschließend wird das mittlere Element der Liste als gefilterter Messwert zurückgegeben.

In den folgenden beiden Bildern werden die Auswirkungen der nichtlinearen Filterung verdeutlicht. Der einzige Unterschied in der Software gegenüber der Messung aus Abschnitt 6.1.2 liegt in der zusätzlichen Implementierung des nichtlinearen Filters in der Messwerterfassung.

Bild 6.6 zeigt die gefilterten Werte der Drehzahl. In Bild 6.7 sind die zugehörigen Stellgrößen zu sehen.

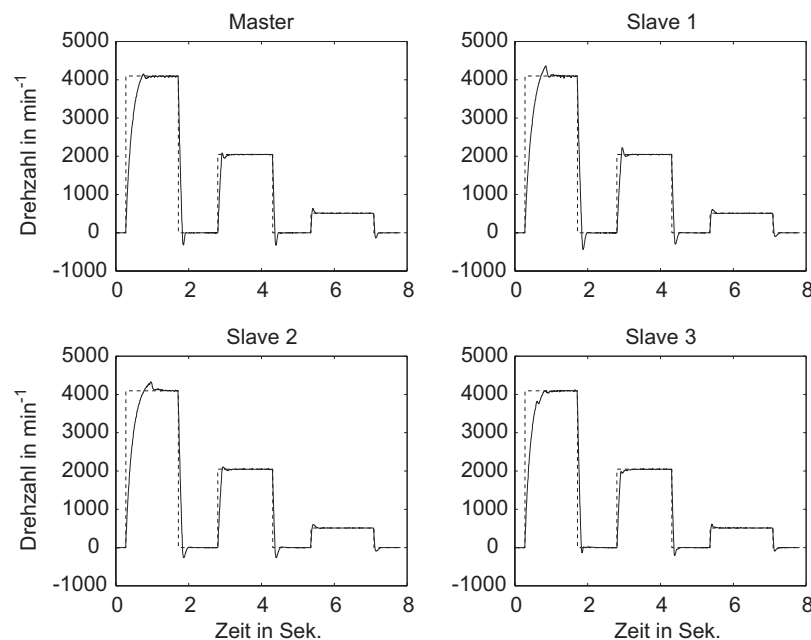


Bild 6.6: Über fünf Werte nichtlinear gefilterte Drehzahlen bei synchronem Betrieb

Der Einfluss der nichtlinearen Filterung ist beim Vergleich der Bilder 6.3 und 6.6 sehr deutlich zu erkennen. Die Drehzahl verläuft wesentlich ruhiger. Auch die Stellgröße in Bild 6.7 weist weniger Peaks als im ungefilterten Fall gemäß Bild 6.5 auf.

Vergleicht man diese Ergebnisse mit den Simulationen aus dem vorherigen Abschnitt, so ist die Übereinstimmung deutlich erkennbar.

Es sei hier noch angemerkt, dass die Sollwertsprünge für die Messungen von Hand ausgelöst wurden und daher die Zeiten der Sprünge von Messwertsatz zu Messwertsatz variieren.



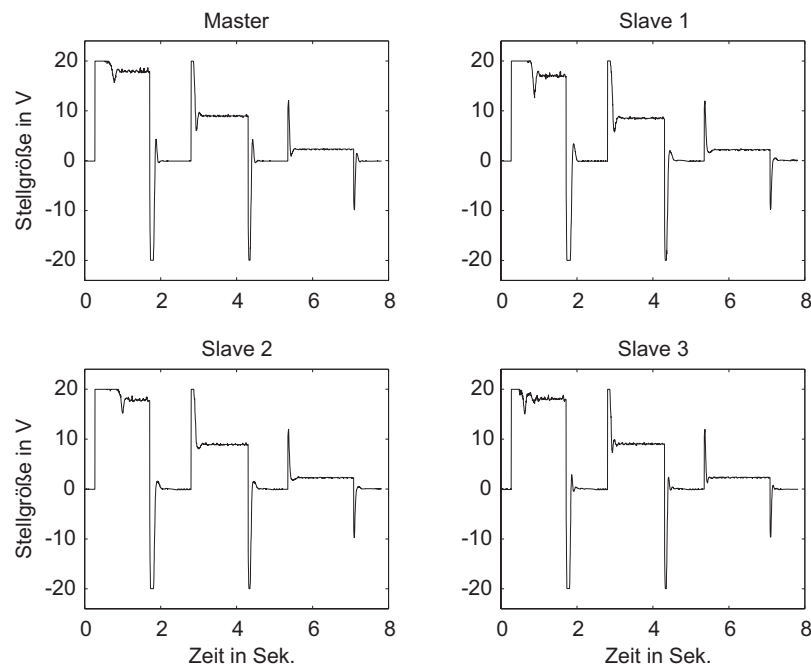


Bild 6.7: Stellgrößen der Drehzahlregler in Volt bei synchronem Betrieb und aktivierter nicht-linearer Filterung

### 6.1.4 Simulationsergebnisse – asynchroner Betrieb

Dieser Abschnitt behandelt den asynchronen Betrieb. Die Zyklen von Regler und Messwert-erfassung betragen dabei jeweils 4 ms, sind aber nicht synchronisiert.

#### Konstanter Versatz

Die Simulationen zeigen eine ideale asynchrone Regelung mit Zykluszeiten von konstant  $T_0 = 4$  ms. Es wird dabei für die Simulation keinerlei Jittern in den Regleraufrufzeitpunkten bzw. der Messwert-erfassung angenommen. Die Zyklen weisen jedoch einen Versatz von  $\frac{T_0}{2}$ , also 2 ms gegeneinander auf. Damit wird sichergestellt, dass zu jedem Regleraufruf ein neuer Lage-Istwert zur Verfügung steht. Bild 6.8 verdeutlicht diesen Sachverhalt.

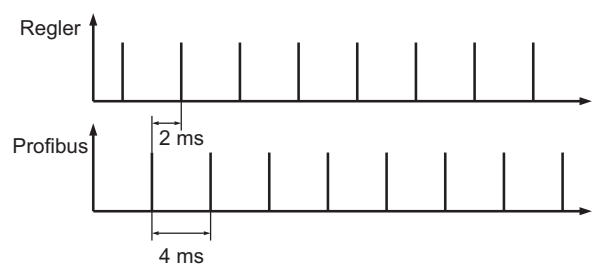


Bild 6.8: Äquidistanter asynchroner Aufruf von Regler und Messwert-erfassung

Die folgenden beiden Simulationen zeigen in Bild 6.9 die Drehzahl des Master-Motors und in Bild 6.10 die zugehörige Stellgröße des Drehzahlreglers.

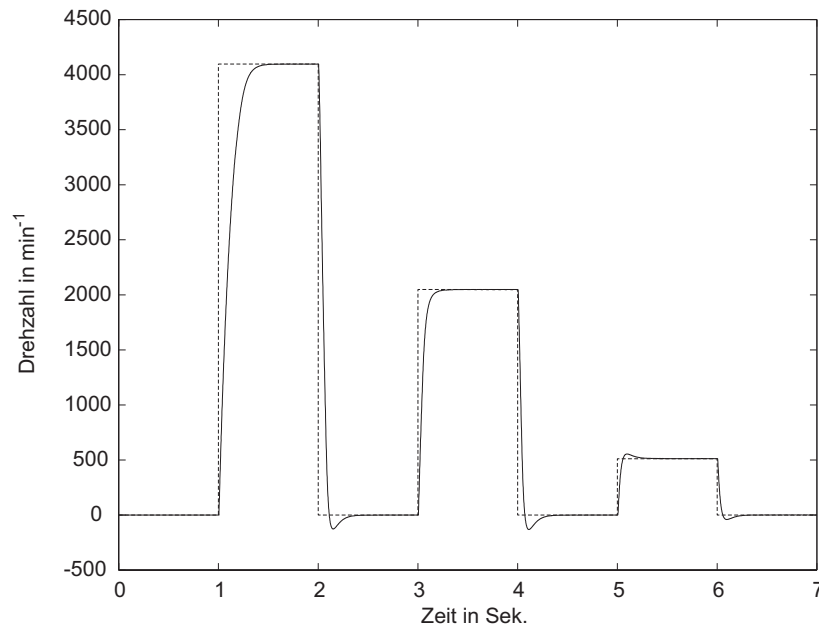


Bild 6.9: Drehzahl des Master-Motors in  $\text{min}^{-1}$  bei asynchronem Betrieb

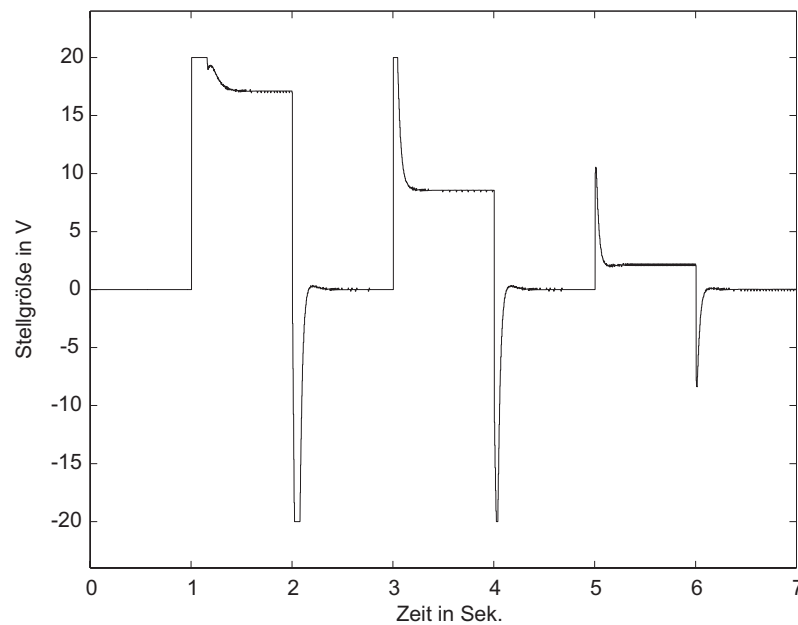


Bild 6.10: Stellgröße des Drehzahlreglers für den Master-Motor in Volt bei asynchronem Betrieb

Es ist, wie auch im synchronen Fall erkennbar, dass die Stellgröße für große Anregungen in die Begrenzung geht. Vergleicht man die simulierten Verläufe von synchroner und asynchroner Regelung, so sind augenscheinlich keine Unterschiede festzustellen.

### Gaußverteiltes Jittern der Messwerterfassung

Als nächsten Schritt soll ein Jittern der Messwerterfassung in die Simulation eingebaut werden. Die Regleraufrufzeiten seien weiterhin als konstant angenommen. Die Messwerterfassung liefere im Mittel alle 4 ms aktuelle Werte, sei aber einem gaußverteilten Jittern mit einer Standardabweichung von 40 % der Abtastzeit  $T_0$  unterlegen.

Bild 6.11 ist links ein Histogramm der Verteilung der Jitterzeiten und rechts der zeitliche Verlauf der Messwerterfassungszyklen dargestellt.

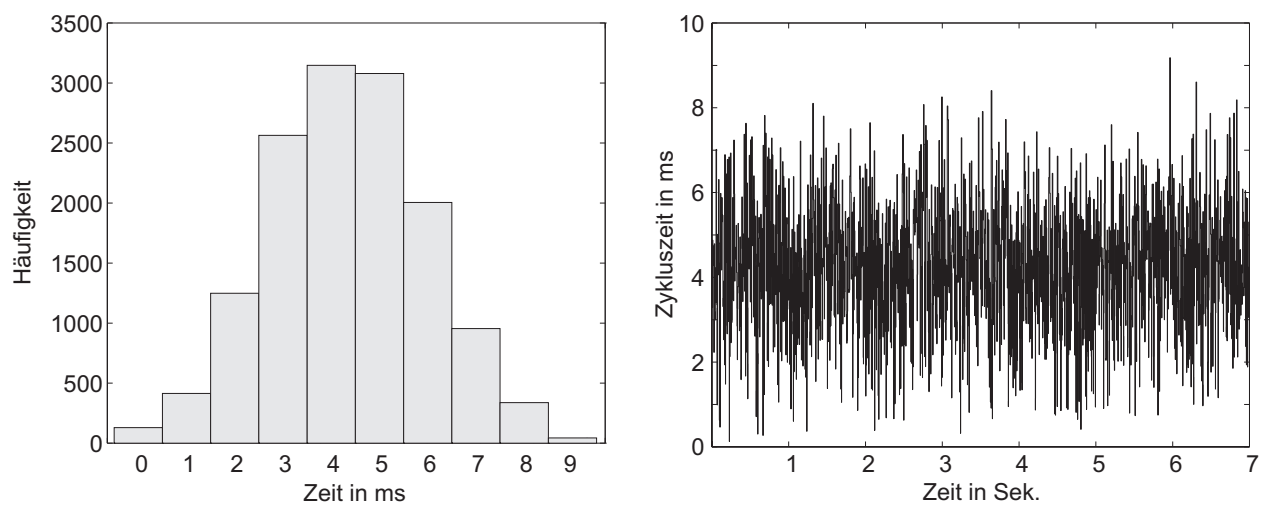


Bild 6.11: links: Histogramm, rechts: zeitlicher Verlauf der Messwertzykluszeiten bei asynchronem Betrieb

Ein Ausschnitt der Aufrufzeitpunkte ist in Bild 6.12 zu sehen. Der Ausschnitt stellt den zeitlichen Bereich von 1,0 s bis 1,1 s dar.

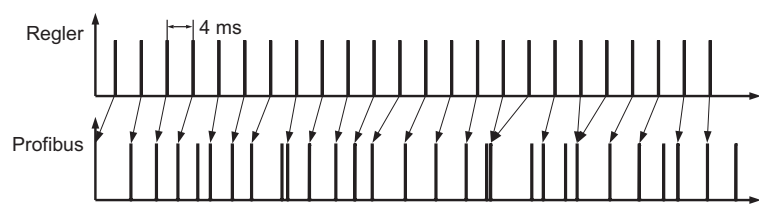


Bild 6.12: Ausschnitt der Aufrufzeitpunkte bei Anwesenheit von Jittern

In den Simulationsergebnissen wurden die Gleichstrommaschinen im Kontinuierlichen, also anhand der Differentialgleichungen berechnet. Die Regler wurden dagegen zeitdiskret mit konstanter Abtastzeit von  $T_0 = 4$  ms simuliert. Die Messwerterfassung, die hier den Profibus repräsentiert, unterliegt einem gaußverteilten Jittern mit Mittelwert 4 ms. Sie ist auch für

die Quantisierung der Werte zuständig. Bild 6.13 zeigt die aus den Lage-Istwerten ermittelte Drehzahl. Die dazugehörige Stellgröße ist in Bild 6.14 zu sehen.

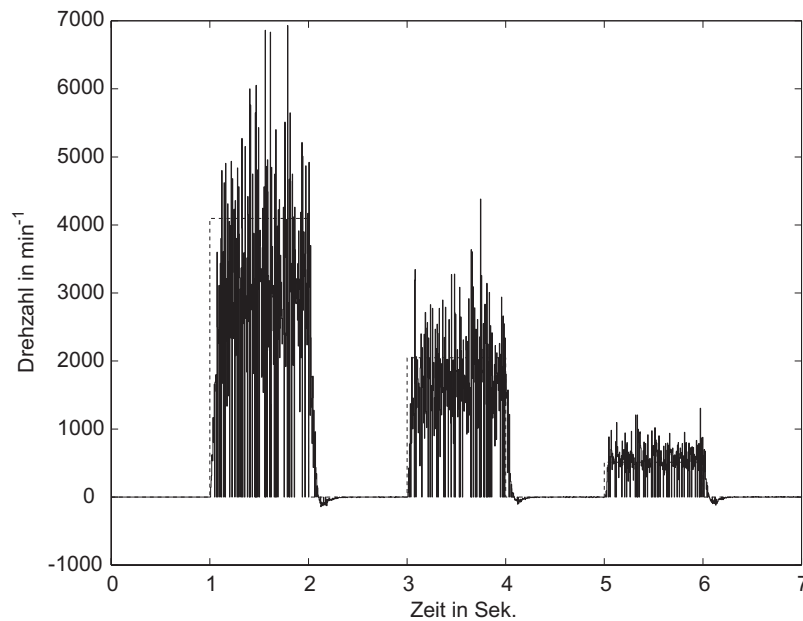


Bild 6.13: Drehzahl des Master-Motors in  $\text{min}^{-1}$  bei asynchronem Betrieb

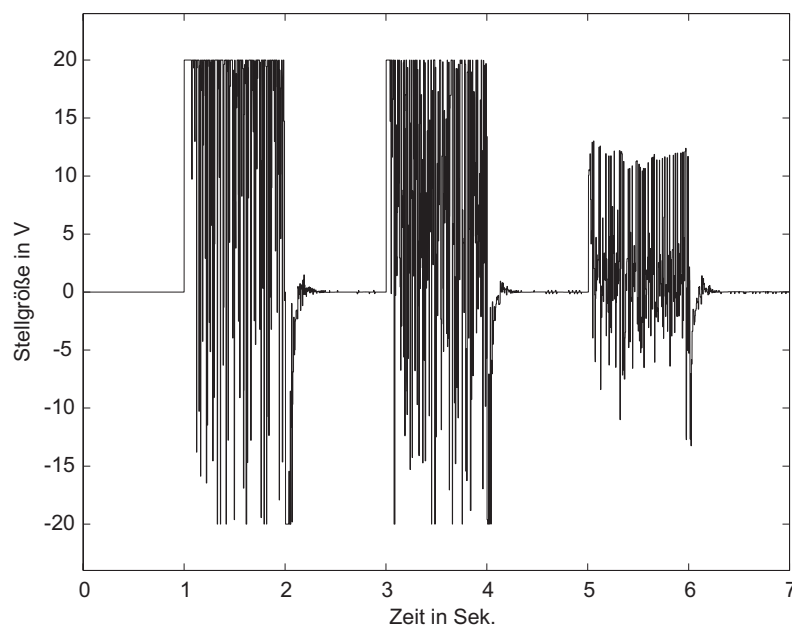


Bild 6.14: Stellgröße des Drehzahlreglers für den Master-Motor in Volt bei asynchronem Betrieb

Auffällig ist hier das stark verrauschte Messsignal der Drehzahl. Diese ist direkt auf das Jittern in der Messwerterfassung zurückzuführen. Für die Fälle, in denen die Zykluszeit der Messwerterfassung größer als die des Reglers ist – der Regler wird zweimal innerhalb eines

Messwertzyklus aufgerufen – erhält der Regler zweimal aufeinander folgend den selben Lage-Istwert. Daraus wird durch Differenzbildung fälschlicherweise die Istdrehzahl null ermittelt. Der Regler reagiert sehr stark auf diese vermeintliche Regelabweichung. Im darauf folgenden Zyklus kann es dann dazu kommen, dass die verlorenen Inkremente der vorherigen Lagemessung auf den aktuellen Lage-Istwert aufsummiert werden, sodass in etwa die doppelte Drehzahl in der Messwertaufbereitung berechnet wird. Darauf reagiert der Regler ebenfalls sehr stark, allerdings mit entgegengesetztem Vorzeichen. Die Simulationsverläufe in Bild 6.13 geben daher nicht den wirklichen Verlauf der Istdrehzahl wieder, sondern einen aufgrund von systematischen Messfehlern hervorgerufenen gestörten Verlauf. Auch in der Simulation wurden die Messwerte der Drehzahl durch Differenzbildung der letzten beiden Lage-Istwerte bestimmt.

Bild 6.15 zeigt den simulierte wahren Drehzahlverlauf des Master-Motors aus dem verwendeten kontinuierlichen Modell der Gleichstrommaschine, der in Bild 6.14 dargestellten Ankerspannung.

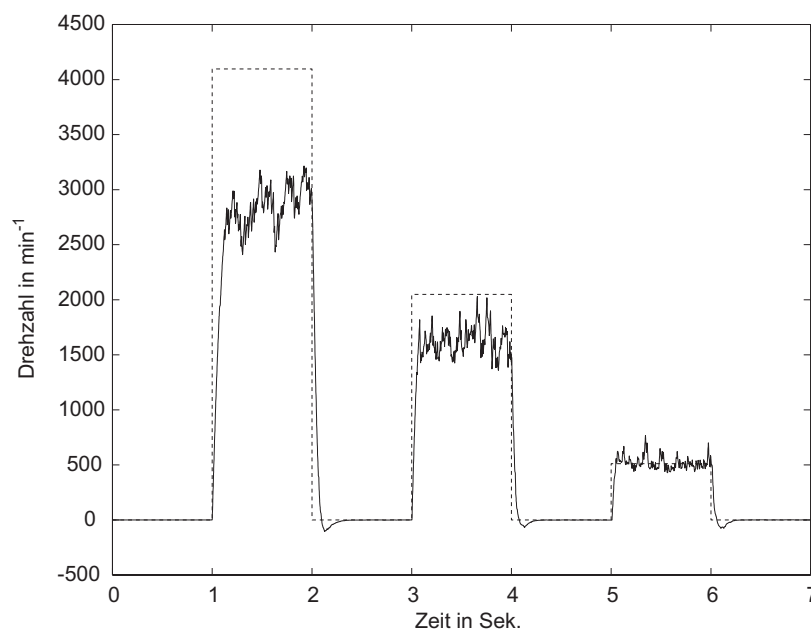


Bild 6.15: Wirkliche Istdrehzahl des Master-Motors in  $\text{min}^{-1}$  aus der Simulation des kontinuierlichen Modells

Deutlich erkennbar ist die stationäre Abweichung der Drehzahl für hohe Sollwerte. Dies ist auf das Einsetzen der Begrenzung zurückzuführen. Der Regler verfügt für hohe Drehzahl-Sollwerte nicht über eine ausreichende Stellgrößenreserve, um die vermeintlichen Störungen ausregeln zu können. Der Verlauf der wirklichen Drehzahl ist nicht zufriedenstellend. Als Abhilfe kann das in Abschnitt 6.1.3 eingeführte nichtlineare Filter eingesetzt werden.

### 6.1.5 Messwerte – asynchroner Betrieb

Um die Effekte des Jitters hervorzuheben, wurde in der SPS eine künstliche Last mit hoher Priorität implementiert. Dazu wurden in der SPS drei zusätzliche Organisationsbausteine mit unterschiedlichen Zykluszeiten definiert, die die Regler zu verschiedenen Zeiten unterbrechen, um so ein künstliches Jittern zu erzeugen. In jedem der drei Bausteine wurden willkürlich 40 Fließkomma-Divisionen durchgeführt, die einen erheblichen Anteil an der zur Verfügung stehenden Rechenleistung benötigten.

Zu bemerken ist, dass bei dem realen System der Regler und die Messwerterfassung eine leicht verschiedene Zykluszeit aufweisen. Nach ca. 122s, was etwa 30500 Abtastschritten entspricht, wird bei einem der beiden Zyklen eine Abtastzeit (4 ms) „eingeholt“. D. h., in der Zeit, in der der eine Zyklus 30500 mal aufgerufen wurde, wurde der andere einmal mehr ausgeführt. Durch diesen kontinuierlich stattfindenden Versatz der Zyklen kann es auch schon durch ein sehr geringes Jittern eines der beiden Zyklen zu unerwünschten Effekten kommen. Diese werden im Folgenden näher beschrieben.

Liegt beispielsweise der Zyklus der Messwerterfassung zwischen den Aufrufzeitpunkten des Reglers, siehe Bild 6.16, so ist sichergestellt, dass zu jedem Regleraufruf ein neuer Lage-Istwert zur Verfügung steht. Aus der Differenz des aktuellen und des vorherigen Wertes lässt sich ein berechneter Drehzahl-Istwert angeben, der dann dem Regelalgorithmus als Istwert übergeben werden kann. Existiert allerdings zusätzlich ein Jittern in der Messwerterfassung, so werden pro Zyklus manchmal einige Inkremente mehr und manchmal weniger gezählt. Dies ist auf die dadurch entstehenden unterschiedlichen Zeiträume zurückzuführen, in denen die Inkremente gezählt werden. Ist der Zyklus der Messwerterfassung kürzer als die nominellen 4 ms, so werden weniger Inkremente gezählt, als in einem Zyklus der länger dauert.

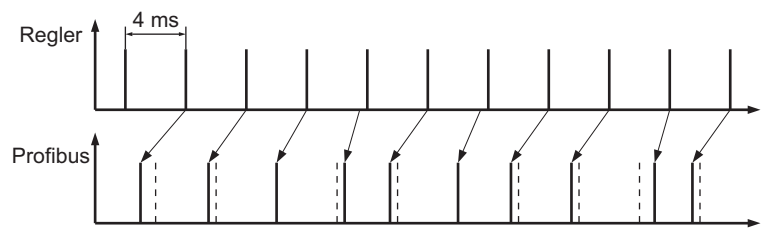


Bild 6.16: Messwerterfassung unterliegt leichtem Jittern, liefert aber immer neue Werte zwischen zwei Regleraufrufen

Es ergibt sich damit ein gemessener Drehzahl-Istwert, etwa so wie im synchronen Fall. Kleine Verzögerungen in der Messwerterfassung oder geringe Laufzeiten beeinträchtigen die Regelqualität nur geringfügig.

Im Gegensatz dazu hat ein Jittern fatale Auswirkungen, wenn der Versatz der Aufrufzeitpunkte von Regler und Messwerterfassung einen Bereich erreicht hat, in dem beide Zyklen zum gleichen Zeitpunkt starten (siehe Bild 6.17). Es kann dann vorkommen, dass die Messwerterfassung im vorherigen Zyklus einen Lage-Istwert kurz vor dem Regleraufruf geliefert hat. Im aktuellen Zyklus wird aber erst kurz nach dem Regleraufruf ein neuer Messwert geliefert. Dies hat zur Folge, dass die Differenz des aktuellen und des vorherigen Lage-Istwertes null ist und daraus fälschlich eine Istdrehzahl von null berechnet wird. Im folgenden Zyklus kann der Messwert dann wieder kurz vor dem Regleraufruf zur Verfügung stehen, was bei Berechnung der Drehzahl einen doppelt so hohen Wert zur Folge hätte. Auf beide Effekte – Drehzahl null und doppelte Drehzahl – reagiert der Regler sehr stark, da er von einer großen Regelabweichung ausgeht.

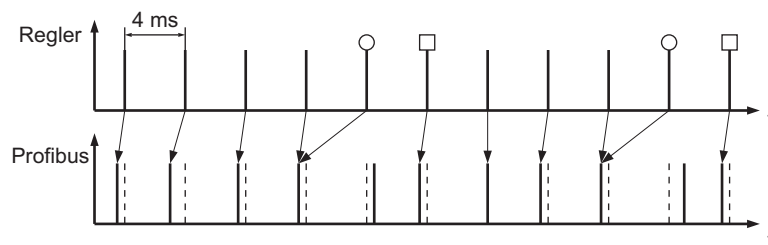


Bild 6.17: Regleraufruf und Messwerterfassung starten zum gleichen Zeitpunkt, unterliegen jedoch einem Jittern

Die Regleraufrufe in Bild 6.17, die mit einem kleinen Kreis markiert wurden, erhalten als Drehzahl-Istwert die Differenz aus zwei identischen Werten, also null. Die mit einem kleinen Quadrat markierten Regleraufrufe erhalten dagegen die doppelte Drehzahl als Istwert. Alle anderen Aufrufe weisen nur geringe Abweichungen vom wirklichen Istwert auf, da bei der Berechnung der Drehzahl auf das Jittern zurückzuführende falsche Zählzeiten angenommen wurden.

Das eben beschriebene Szenario stellt einen systematischen Fehler in der Messwerterfassung bzw. der Berechnung des Drehzahl-Istwertes dar und kann nicht als Auswirkung von veränderlichen Regleraufrufzeitpunkten oder Jittern des Messwertzykluses verstanden werden. Es hängt zwar direkt damit zusammen, Ursache ist aber die unzureichende Messwertaufbereitung. Abhilfen sind am Ende dieses Abschnittes angegeben.

Die folgenden Diagramme zeigen in Bild 6.18 und Bild 6.19 den Fall des asynchronen Betriebs, bei denen die Zyklen von Regler und Messwerterfassung um ca. 2 ms gegeneinander versetzt sind und Jittern (erster oben beschriebener Fall).

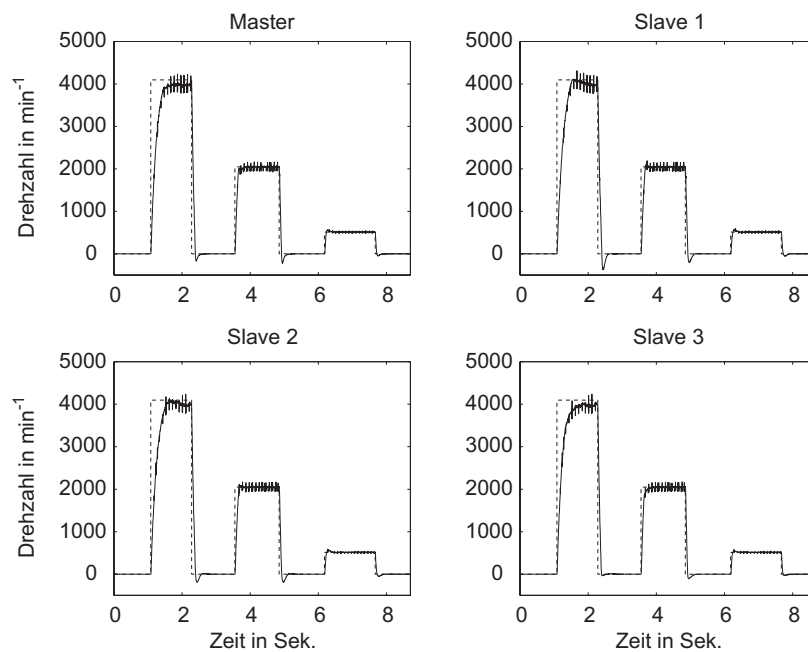


Bild 6.18: Berechnete Drehzahlen der Motoren in  $\text{min}^{-1}$  bei asynchronem Betrieb mit Messwertlieferung zwischen den Regleraufrufen

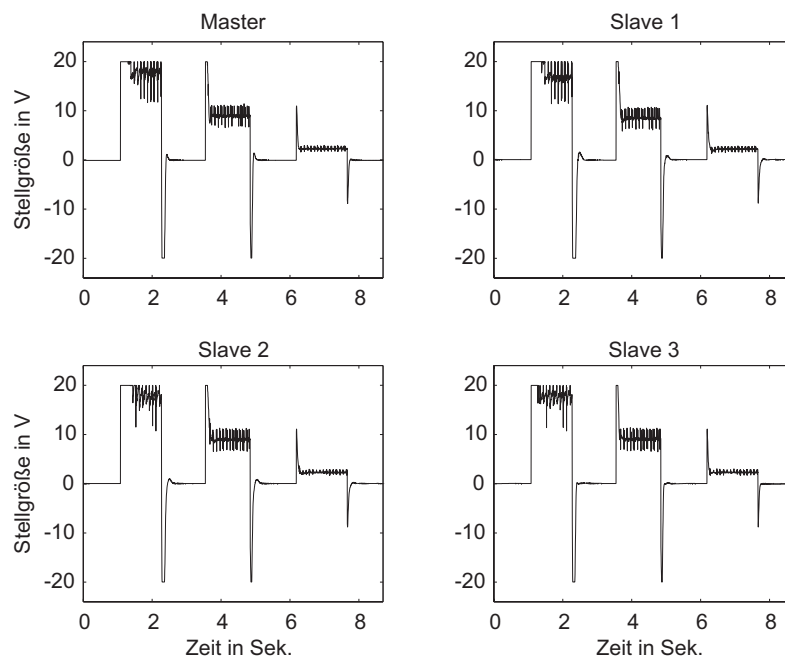


Bild 6.19: Stellgrößen der Drehzahlregler in Volt bei asynchronem Betrieb mit Messwertlieferung zwischen den Regleraufrufen

Darauf folgend ist in den Bildern 6.20 und 6.21 der zweite Fall dargestellt, bei dem die Aufrufzeitpunkte bis auf das Jittern gleichzeitig stattfinden.



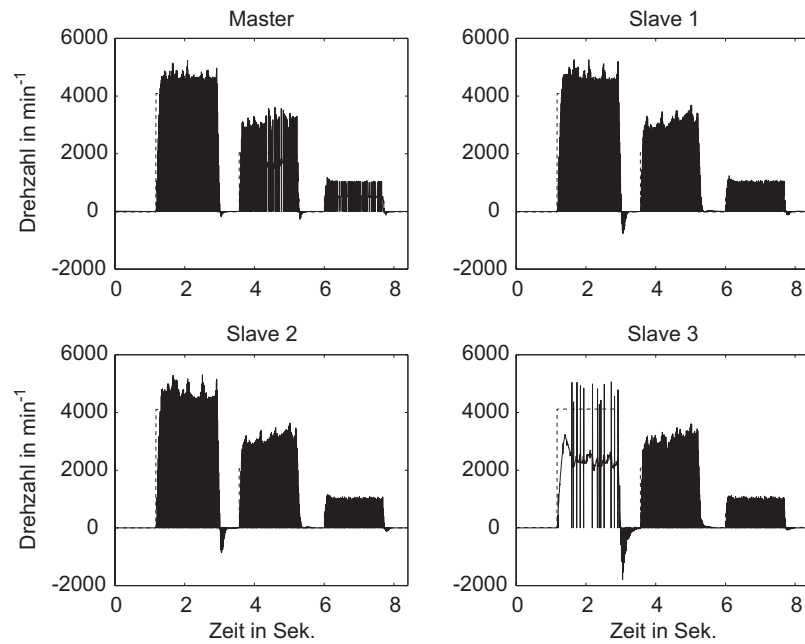


Bild 6.20: Berechnete Drehzahlen der Motoren in  $\text{min}^{-1}$  bei asynchronem Betrieb mit etwa gleichen Aufrufzeitpunkten für Regelung und Messwernerfassung

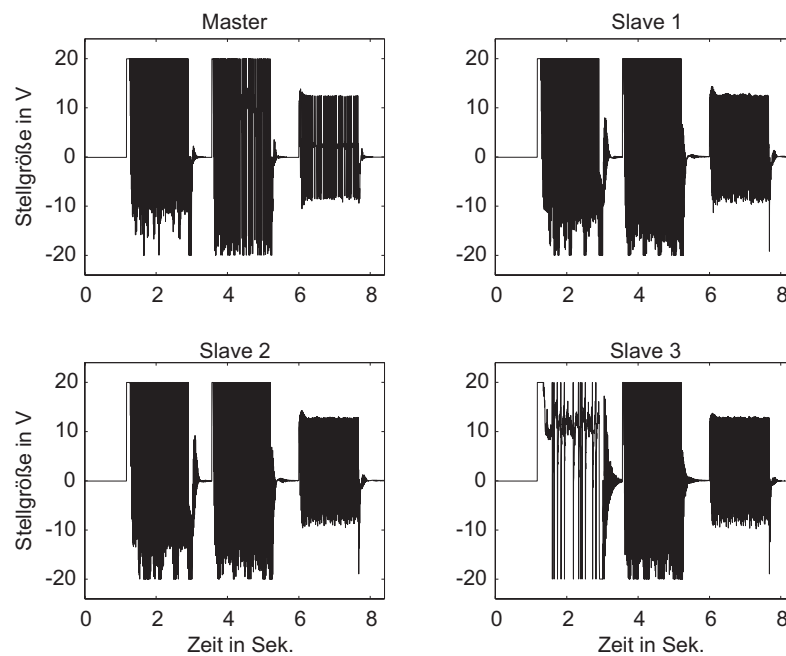


Bild 6.21: Stellgrößen der Drehzahlregler in Volt bei asynchronem Betrieb mit etwa gleichen Aufrufzeitpunkten für Regelung und Messwernerfassung

Für den ersten Fall (Bild 6.18 und Bild 6.19) ist, wie angenommen, ein ähnlicher Verlauf wie im Falle des synchronen Betriebs zu erkennen. Die stationäre Abweichung für den Sprung auf die Soll-drehzahl  $4096 \text{ min}^{-1}$  ist der aktiven Begrenzung zuzuschreiben. Der Unterschied zwischen synchronem und asynchronem Betrieb weist damit nur geringe Abweichungen auf. Anders sieht dies aus, wenn die oben beschriebenen Effekte des Jitterns um gleichzeitige Aufrufzeitpunkte von Regler und Messwerterfassung auftreten. Dadurch werden die Messwerte fehlinterpretiert, was in den gemessenen Werten in Bild 6.20 und Bild 6.21 zu erkennen ist.

Da bei der Ankerspannung für die Sollwertsprünge auf  $4096 \text{ min}^{-1}$  bzw.  $2048 \text{ min}^{-1}$  sehr starke Begrenzungseffekte zu erkennen sind, ist nur der Sprung auf die Drehzahl  $512 \text{ min}^{-1}$  für die Regelung repräsentativ. Dort ist gut zu erkennen, dass die berechnete Drehzahl für einen Sprung auf  $512 \text{ min}^{-1}$  sehr stark zwischen 0 und der doppelten Drehzahl  $1024 \text{ min}^{-1}$  hin und her springt. Das Bild 6.22 zeigt einen Ausschnitt des Drehzahlverlaufs des Masters aus Bild 6.20, anhand dessen man die Effekte des Jitterns in Bezug auf die Drehzahlberechnung gut erkennt.

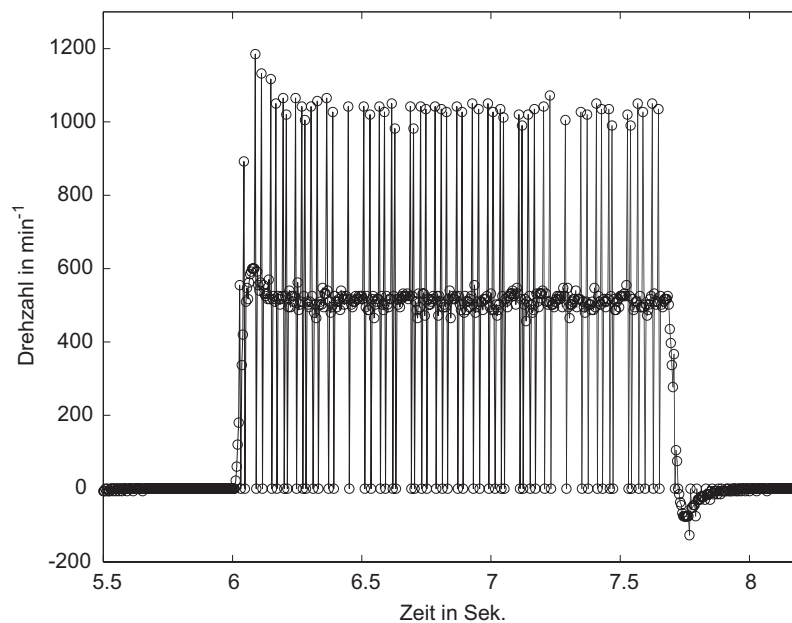


Bild 6.22: Ausschnitt aus Bild 6.20

Mit kleinen Kreisen sind die berechneten Drehzahl-Istwerte explizit gekennzeichnet. Die meisten Messwerte liegen dabei auf einer Linie um  $512 \text{ min}^{-1}$ . Eine weitere Anzahl von Werten liegen ungefähr gleich verteilt bei  $1024 \text{ min}^{-1}$  bzw.  $0 \text{ min}^{-1}$ . Damit wurde gezeigt, dass die oben beschriebenen Zusammenhänge zwischen Jittern und Messwertverarbeitung tatsächlich auftreten. Das Histogramm in Bild 6.23 zeigt die Verteilung der so ermittelten Drehzahlen.

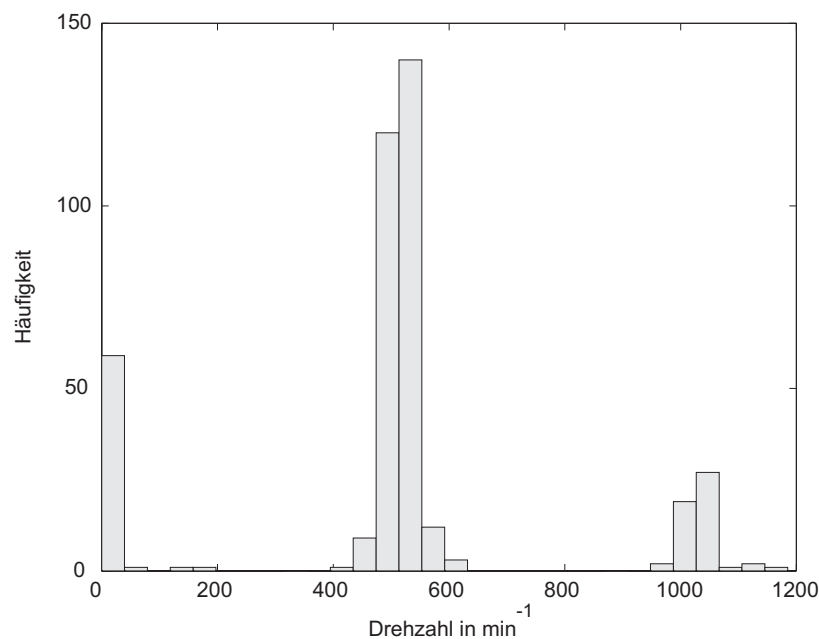


Bild 6.23: Histogramm der Drehzahlen bei Drehzahlsprung auf  $512 \text{ min}^{-1}$

Die gaußförmige Verteilung um den Sollwert ist auf das leichte Jittern in der Lage-Erfassung zurückzuführen. Mal werden ein paar Inkremente mehr, mal weniger gezählt. Die Anteile bei Drehzahl null bzw. bei der doppelten Drehzahl lassen sich auf die beschriebene Fehlauswertung der Lageinformationen zurückführen.

Die systematischen Fehler in der Drehzahlberechnung lassen sich auf zwei Wegen umgehen:

- Einsatz eines nichtlinearen Filters zur Unterdrückung der Ausreißer.
- Einbeziehen der tatsächlichen Zykluszeiten bei der Drehzahlberechnung. Dazu ist notwendig, dass jeder Lage-Istwert mit einem Zeitstempel versehen wird.

Auf diese beiden Möglichkeiten soll im Folgenden näher eingegangen werden.

### Einsatz eines nichtlinearen Filters

In welcher Art und Weise die berechneten Drehzahlwerte durch Filter verbessert werden können, soll hier näher beschrieben werden. Als Filter wird das in Abschnitt 6.1.3 eingeführte nichtlineare Median-Filter eingesetzt, das die zwei größten bzw. kleinsten Messwerte ignoriert. Die Erfolgsaussichten eines solchen Filters sind sehr groß, da gemäß Bild 6.23 der größte Anteil der berechneten Drehzahlwerte den richtigen Betrag aufweist und lediglich einige Ausreißer bei null bzw. der doppelten Drehzahl liegen.

Bild 6.24 zeigt in Anlehnung an Bild 6.20 den Verlauf der gefilterten Drehzahlen aller vier Motoren und Bild 6.25 die zugehörigen Stellgrößen der Drehzahlregler.

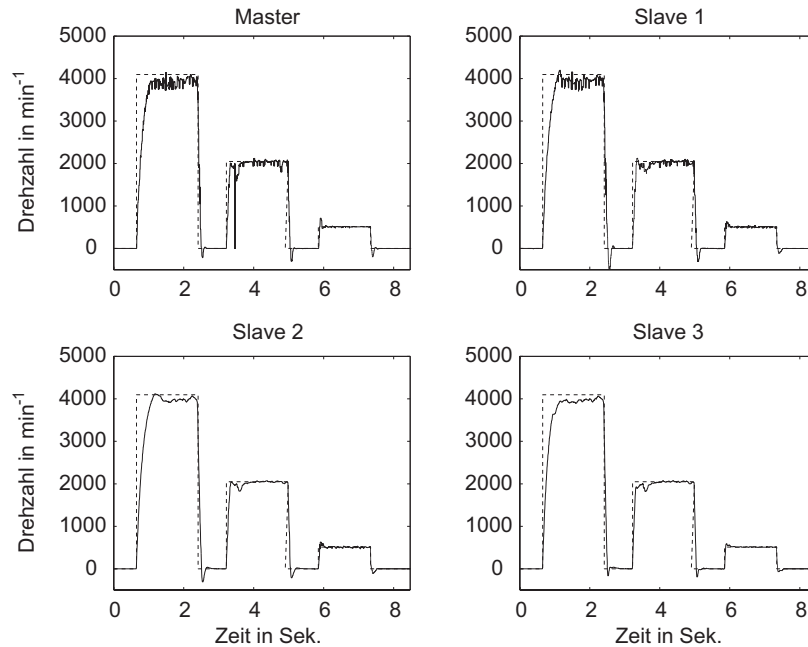


Bild 6.24: Berechnete Drehzahlen der Motoren in  $\text{min}^{-1}$  bei asynchronem Betrieb und aktivierter nichtlinearer Filterung

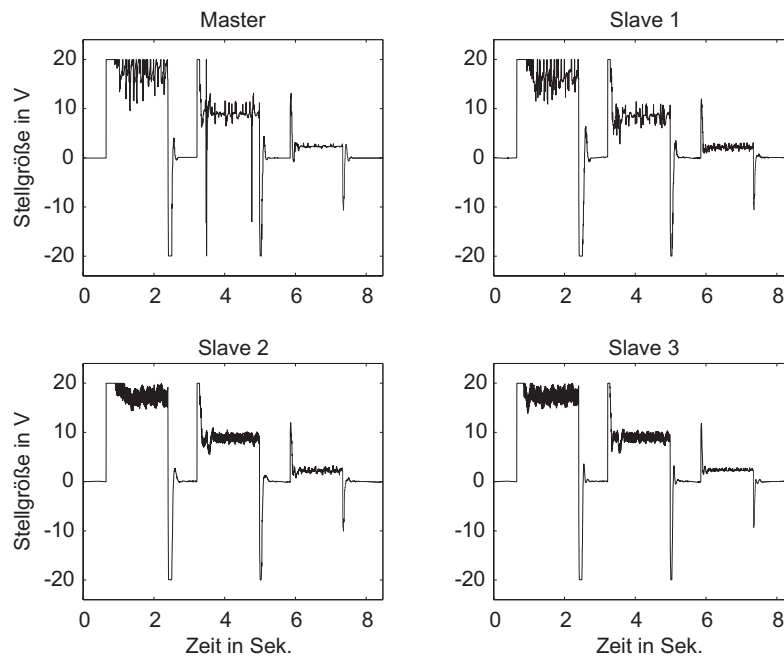


Bild 6.25: Stellgrößen der Drehzahlregler in Volt bei asynchronem Betrieb und aktivierter nichtlinearer Filterung

Deutlich ist die Verbesserung der Regelqualität gegenüber der ungefilterten Variante gemäß Bild 6.20 zu erkennen. Der stationäre Fehler bei Sprung auf  $4096 \text{ min}^{-1}$  liegt, wie zuvor auch, an der Begrenzung der Stellgröße. Die Verläufe der Stellgröße sind ebenfalls sehr viel glatter und schonen damit die Stellglieder.

### Drehzahlberechnung bei bekannten Messzeitpunkten

Die Berechnung der Drehzahl aus den letzten beiden Lage-Istwerten  $\varepsilon_{\text{neu}}$  und  $\varepsilon_{\text{alt}}$ , setzt voraus, dass die gelieferten Messwerte äquidistant aufgenommen wurden. Daraus kann mit den Angaben

- Zykluszeit:  $T_0 = 4 \text{ ms}$
- Anzahl der Inkremente pro Umdrehung:  $N = 2000$

direkt die Istdrehzahl der Motoren berechnet werden. Diese ergibt sich zu

$$n_{\text{ist}} = \frac{\varepsilon_{\text{neu}} - \varepsilon_{\text{alt}}}{N} \cdot \frac{60 \frac{\text{s}}{\text{min}}}{T_0}. \quad (6.5)$$

Der Faktor 60 steht darin für die Umwandlung von Umdrehungen pro Sekunde in Umdrehungen pro Minute. Aus dieser Gleichung ist sofort zu erkennen, dass ein Jittern von  $T_0$  einen direkten Einfluss auf die berechnete Drehzahl hat.

Dies kann umgangen werden, indem anstatt der angenommenen konstanten Abtastzeit  $T_0$  die wirkliche Zykluszeit  $T_z$  zugrunde gelegt wird. Um dies zu verwirklichen, müssten den gemessenen Lage-Istwerten Zeitstempel zugeordnet werden. Anhand dieser ist eine exakte Zuordnung des Messwertes zum Messzeitpunkt sichergestellt. Auf diese Art und Weise ist sofort zu erkennen, wenn der Messwertaufbereitung aufgrund des Jitterns zweimal der selbe Messwert übergeben würde. Dieser Zyklus könnte dann ignoriert und mit dem zuvor berechneten Drehzahlwert weiter gearbeitet werden. Erhält man im darauf folgenden Zyklus den zeitlich richtig zugeordneten Wert – der Istwert aus dem vorherigen Zyklus wurde übersprungen – so erkennt man dies anhand des Zeitstempels und können durch die richtige Zeitdifferenz teilen. Die so modifizierte Drehzahlberechnung ist in Glg. (6.6) angegeben

$$n_{\text{ist}} = \frac{\varepsilon_{\text{neu}} - \varepsilon_{\text{alt}}}{N} \cdot \frac{60 \frac{\text{s}}{\text{min}}}{T_{z \text{ neu}} - T_{z \text{ alt}}}, \quad (6.6)$$

wobei  $T_{z \text{ neu}}$  und  $T_{z \text{ alt}}$  die Zeitstempel der Lage-Istwerte sind.

Um die Vorteile dieser Art von Messwertaufbereitung zu zeigen, wurden Lage-Istwerte zu unterschiedlichen Zeiten künstlich generiert. Die Messzeiten  $T_z$  sind in Spalte zwei der Tabelle 6.2 aufgeführt. Die so erhaltenen Werte  $\Delta_\varepsilon$  sind in Spalte drei zu sehen. Spalte vier enthält den Wert der Lage als Ganzzahl. In Spalte fünf sind die berechneten Drehzahlwerte nach der Methode mit als konstant angenommener Zykluszeit angegeben. Die letzte Spalte zeigt die berechneten Drehzahlwerte, bei Verwendung der Methode mit Zeitstempeln.

Tabelle 6.2: Vergleich der Methoden zur Messwertaufbereitung

$T_0$ in ms	$T_z$ in ms	$\Delta_\varepsilon$ theor.	INT( $\Delta_\varepsilon$ ) in Inkr.	ber. Drehzahl Methode 1 in $\text{min}^{-1}$	ber. Drehzahl Methode 2 in $\text{min}^{-1}$
0	0	0,0	0	-	-
4	3,8	126,7	126	945,0	994,7
8	7,4	246,7	246	900,0	1000,0
12	11,8	393,3	393	1102,5	1002,3
16	15,9	530,0	529	1020,0	995,1
20	20,1	670,0	669	0,0	995,1
24	23,9	796,7	796	2002,5	1002,6
28	28	933,3	933	1027,5	1002,4
32	31,8	1060,0	1059	945,0	994,7
36	35,9	1196,7	1196	1027,5	1002,4
40	40,2	1340,0	1339	0,0	1002,4
44	43,9	1463,3	1463	2002,5	1005,4
48	47,9	1596,7	1596	997,5	997,5

Es ist deutlich zu erkennen, dass die Methode 2 wesentlich bessere Werte liefert. Zum Vergleich sind hier die Standardabweichungen der beiden Methoden angegeben.

Standardabweichung Methode 1 :  $\sigma_1 = 605,91$

Standardabweichung Methode 2 :  $\sigma_2 = 3,89$

Zusätzlich zeigt Bild 6.26 die beiden berechneten Drehzahlverläufe.

Leider konnte Methode 2 im Rahmen der Untersuchungen nicht implementiert werden, da ein Zeitstempeln der Messwerte nicht möglich war.

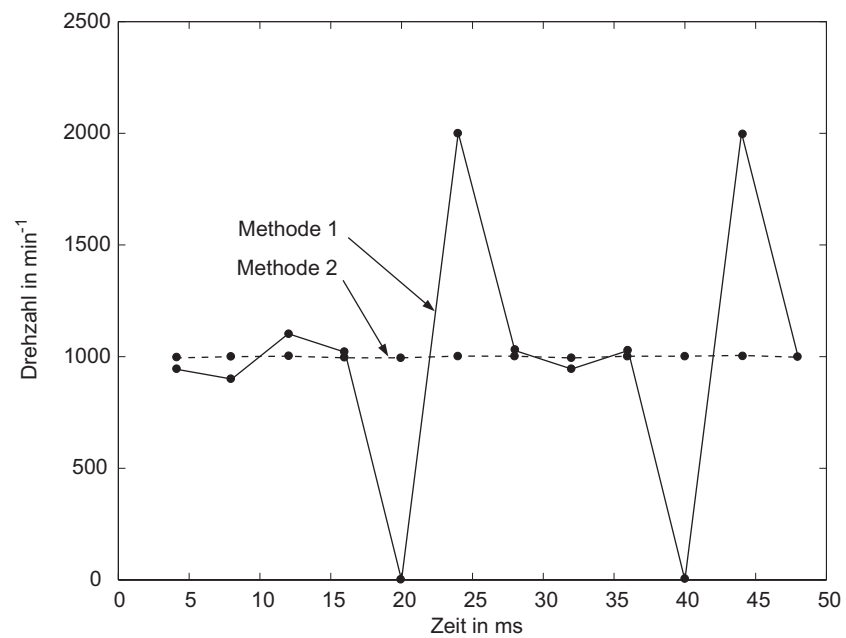


Bild 6.26: Darstellung der berechneten Drehzahlverläufe nach den vorgestellten Methoden

## 6.2 Differenzlageregler

Äquivalent zu den Untersuchungen für die Drehzahlregelung werden in diesem Abschnitt die am Versuchsstand vorgenommenen Messungen in Bezug auf den Einfluss eines Jitters bei synchronem und bei asynchronem Betrieb für die Differenzlageregelung vorgestellt. Dazu wurde zusätzlich zu den Drehzahlreglern für jeden Slave-Motor der implementierte Differenzlageregler aktiviert. Die eingesetzte Reglerstruktur ist Bild 5.12 zu entnehmen.

### 6.2.1 Messwerte der Differenzlageregelung – synchroner Betrieb

Bild 6.27 zeigt den Positionsverlauf der drei Slave-Motoren in Inkrementen für den synchronen Betrieb bei gleicher sprungförmiger Anregung der Drehzahl wie in den vorherigen Untersuchungen. Der Verlauf der Lage des Master-Motors ist der der Slaves sehr ähnlich. Aus diesem Grund wurde zu jedem Diagramm gemäß Bild 6.27 ein weiteres Diagramm gemäß Bild 6.28 dargestellt, in dem die Abweichung der Lage der Slave-Motoren von der Lage des Master-Motors  $\varepsilon_{Si} - \varepsilon_M$  dargestellt ist.

Den Differenzlageregler wurde für die Messungen ein Sollwert von null vorgegeben, um einen Winkelversatz zu verhindern.

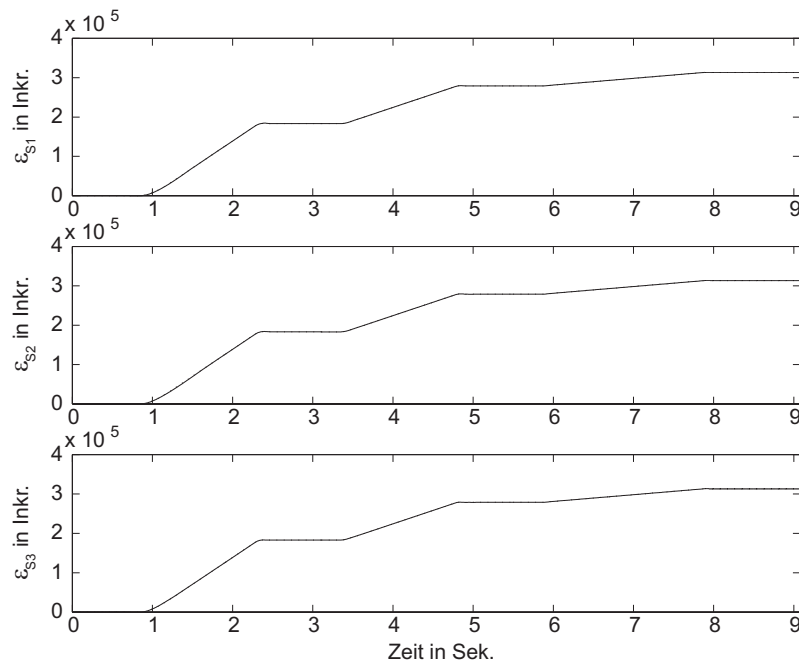


Bild 6.27: Lage-Istwerte der Slaves in Inkrementen bei synchronem Betrieb



Die erste Steigung der Lage ist auf einen Sollwertsprung auf  $4096 \text{ min}^{-1}$  zurückzuführen. Darauf folgend wird der Sollwert wieder auf null zurückgesetzt. Es folgt ein Sprung auf Sollwert  $2048 \text{ min}^{-1}$  mit erneutem Stoppen und anschließendem Sprung auf  $512 \text{ min}^{-1}$ . Als letztes wird die Solldrehzahl wieder auf null gesetzt.

Um die Abweichung in der Lage bei Verstellvorgängen deutlich zu zeigen, sind in Bild 6.28 die Differenzen aus Slave- und Master-Lage dargestellt. Das oberste Diagramm stellt dabei  $\varepsilon_{S1} - \varepsilon_M$ , das mittlere  $\varepsilon_{S2} - \varepsilon_M$  und das unterste  $\varepsilon_{S3} - \varepsilon_M$  dar. Stationär verschwinden die Abweichungen in der Lage zwischen Master-Motor und den Slaves aufgrund des implementierten Reglers.

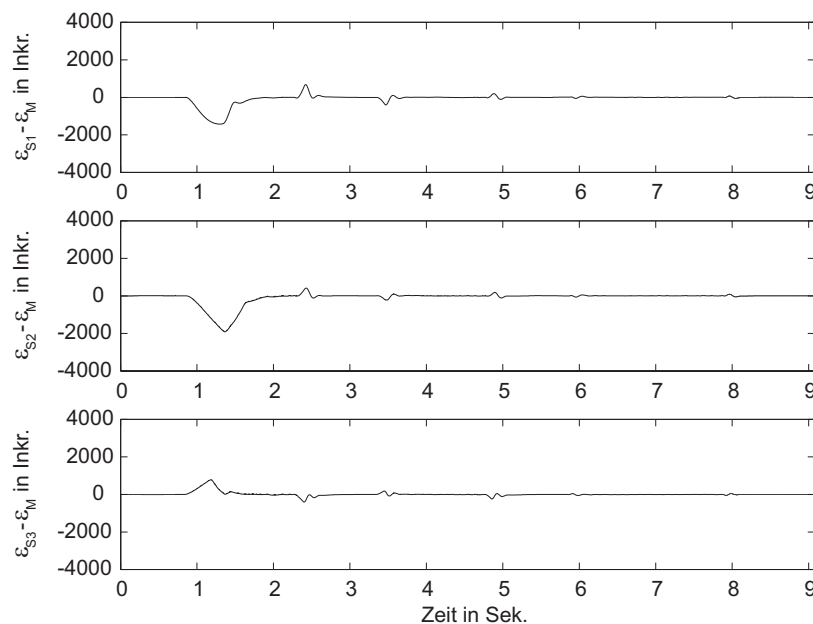


Bild 6.28: Lagedifferenzen in Inkrementen bei synchronem Betrieb

Die drei unterschiedlichen Verläufe der Differenzen sind darauf zurückzuführen, dass es sich um Messungen handelt und sich reale Komponenten, wie Motoren und Servoverstärker, nicht exakt gleich verhalten. Den größten Einfluss haben dabei die in den Servoverstärkern implementierten Stromregler. Sieht man sich die Verläufe der Differenzen für den stationären Fall, also Vorgabe eines konstanten Sollwerts für die Drehzahl an, so kann man durchaus von einem Winkelgleichlauf der Motoren sprechen. Dies gilt auch für dynamische Verstellvorgänge nicht zu großer Amplitude. Beim Sprung auf  $4096 \text{ min}^{-1}$  sind dagegen deutlich kurzzeitige Abweichungen zu erkennen. Das Bild 6.28 gibt den erwarteten Verlauf für die eingesetzte Regelung wieder.

### 6.2.2 Messwerte der Differenzlageregelung – asynchroner Betrieb

Im Vergleich zum vorherigen Abschnitt werden die Untersuchungen für den Fall des asynchronen Betriebs wiederholt. Aufgrund der Ergebnisse der Untersuchungen mit Drehzahlregelung wird hier gezielt der „Worst Case“ Fall betrachtet, nämlich ein Jittern der Abtastzeiten um ein gleichzeitiges Starten der Zyklen der Regler und der Messwerterfassung.

#### „Worst Case“

Bild 6.29 zeigt den Verlauf der Lage der Motoren. Wie schon im synchronen Fall ist auch hier eine Abweichung zwischen Master und Slaves nicht erkennbar. Bild 6.30 zeigt daher die Lagedifferenz der Slave-Motoren in Bezug auf die Lage des Masters.

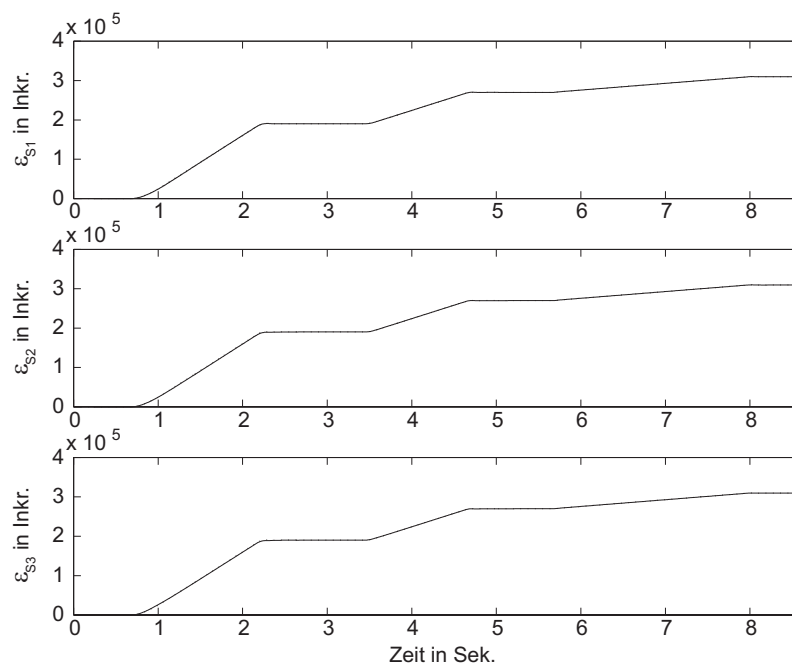


Bild 6.29: Lage-Istwerte der Slaves in Inkrementen bei asynchronem Betrieb

Prinzipiell weisen die Verläufe für die Differenzen des synchronen und des asynchronen Betriebs ein ähnliches Verhalten auf. Allerdings sind in Bild 6.30 deutlich starke Spitzen zu erkennen. Diese sind, wie schon im Falle der Drehzahlregelung, durch unterschiedliche, nicht äquidistante Abtastungen der Istwerte zu erklären. Es kann wieder der Fall auftreten, dass aufgrund des Jitterns zweimal derselbe Wert verarbeitet und anschließend ein Wert übersprungen wird.

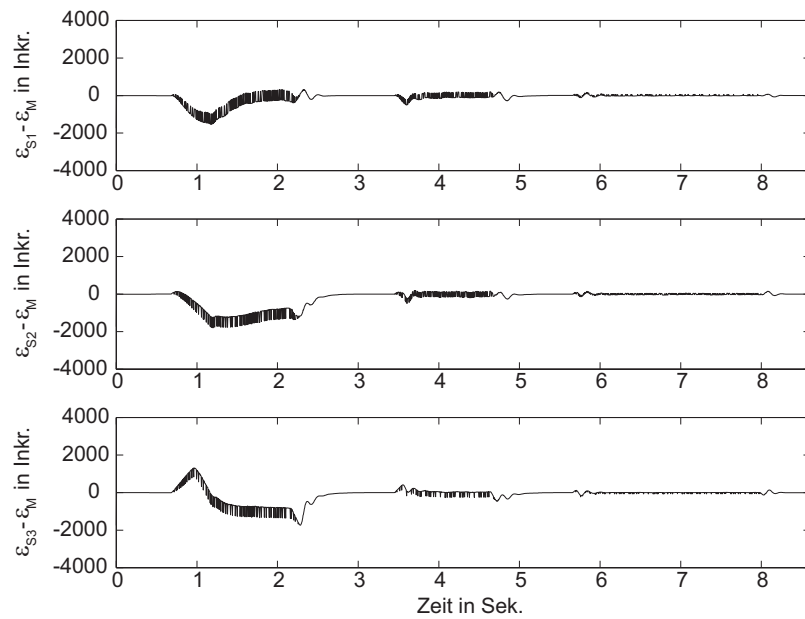


Bild 6.30: Lagedifferenzen in Inkrementen bei asynchronem Betrieb

Im Falle der Drehzahl wurde ein nichtlineares Filter implementiert, das diese Ausreißer eliminiert. Dies kann auch für die Messwerte der Lage implementiert werden und würde zu ähnlichen Erfolgen führen. Die Filterung der Lage soll hier aber nicht weiter untersucht werden, da die Auswirkungen anhand der Drehzahl hinreichend verdeutlicht wurden.

### „Best Case“

Im Gegensatz zu den Messungen oben wurden hier die Messwerte im günstigsten Fall genommen, nämlich dann, wenn die Messwerterfassung etwa in der Mitte zwischen zwei Regleraufrufen neue Werte liefert.

Die Bilder 6.31 und 6.32 zeigen die entsprechenden Messwerte der Lage bzw. der Abweichung der Lage zwischen Slaves und Master.

Wie zu erwarten war, sind die Peaks verschwunden, da die Messwerterfassung in diesem Fall durch das Jittern in zwei aufeinanderfolgenden Zyklen keine doppelt so großen bzw. gleichen Messwerte liefert. Die Kurvenverläufe ähneln daher denen im Falle der synchronen Regelung.

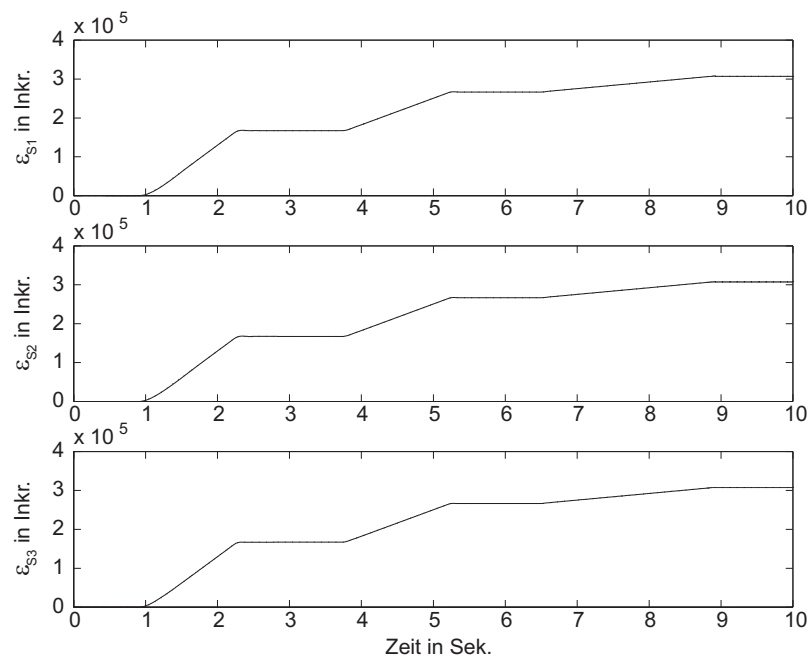


Bild 6.31: Lage-Istwerte der Slaves in Inkrementen bei asynchronem Betrieb

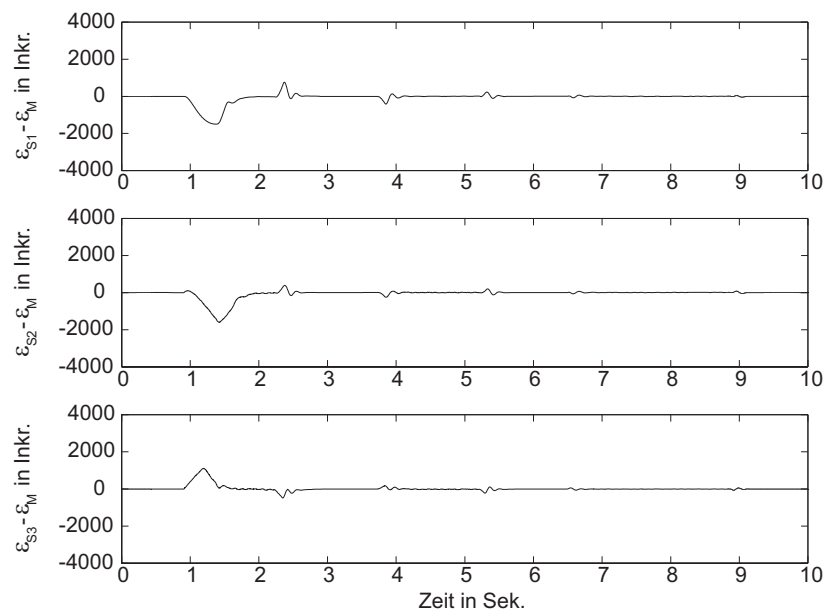


Bild 6.32: Lagedifferenzen in Inkrementen bei asynchronem Betrieb

## 6.3 Lageregler

Als äußerster Regler in der Kaskade wird abschließend der Lageregler zur Vorgabe einer gezielten Position für die vier Antriebe betrachtet. Die zugrunde gelegte Reglerstruktur ist Bild 5.13 zu entnehmen. Auch hier ist der Einfluss der Abtastzeit zu untersuchen. Dazu werden als erstes Messwerte der Lageregelung bei synchronem Betrieb vorgestellt und diskutiert.

### 6.3.1 Messwerte der Lageregelung – synchroner Betrieb

Die in Bild 6.33 dargestellten Kurven zeigen den Verlauf der Position der Slave-Motoren bei sprungförmiger Änderung der Sollposition für den Master-Motor. Der erste Sprung erfolgt dabei auf 16000 Inkremente, was exakt 8 Umdrehungen entspricht. Die beiden darauf folgenden Sprünge verursachen einen Verstellvorgang von 4000 bzw. 2000 Inkrementen, was zwei bzw. einer Umdrehung entspricht.

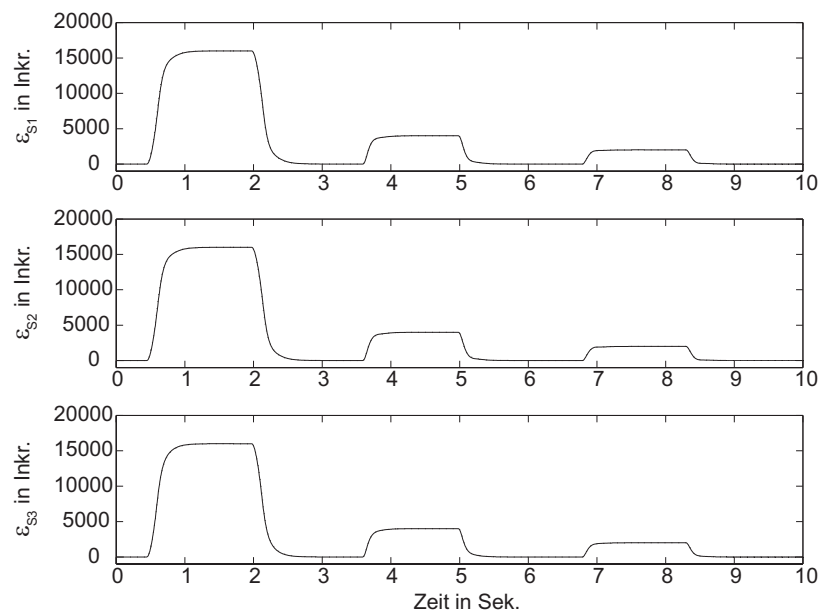


Bild 6.33: Lage-Istwerte der Slaves in Inkrementen bei synchronem Betrieb

Die Unterschiede zwischen der Master- und der Slave-Lage sind in dieser Darstellungsform nicht zu erkennen. Aus diesem Grund wurde in Bild 6.34 die Differenz zwischen den Slave-Lagen und der Master-Lage als Maß für den Fehler dargestellt.

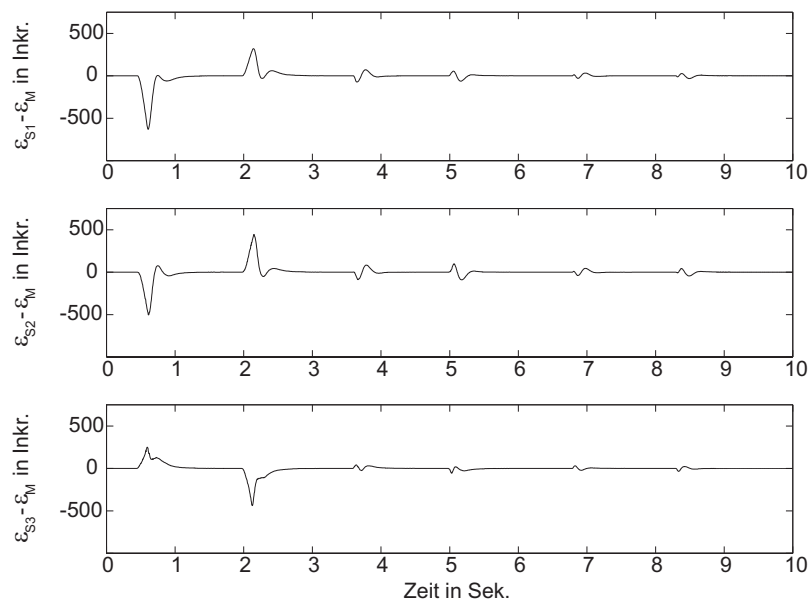


Bild 6.34: Lagedifferenzen in Inkrementen bei synchronem Betrieb

Sowohl die Verläufe für die Lage, als auch die Verläufe der Lagedifferenz weisen den erwarteten Verlauf auf und sind frei von Peaks. Es sei darauf hingewiesen, dass bei der Messwertfassung der Lage-Istwerte keinerlei Filter eingesetzt wurden. Auch die berechneten Werte für die Istdrehzahl des unterlagerten Drehzahlreglers wurden nicht gefiltert.

Eine gesonderte Darstellung der Stellgröße des Lagereglers ist nicht sinnvoll, da es sich um einen Proportional-Regler handelt und die Stellgröße somit proportional zum Regelfehler, also der Abweichung der Lage vom Sollwert, ist.

Neben den Messungen soll hier auch eine Simulation für den synchronen Fall aufgezeigt werden, um die Ergebnisse zu verifizieren.

### 6.3.2 Simulationsergebnisse der Lageregelung – synchroner Betrieb

Es werden die obigen Messwerte anhand von Simulationen des Gesamtsystems verifiziert. Dazu wurden die Größen Lage (Bild 6.35), Drehzahl (Bild 6.36), Stellgröße des Drehzahlreglers (Bild 6.37) und Stellgröße des Lagereglers (Bild 6.38) berechnet und in je einem Diagramm über der Zeit aufgetragen.

Da bei den Simulationen ideale Voraussetzungen angenommen wurden, stimmen die Verläufe von Master- und Slave-Drehzahl bzw. Master- und Slave-Lage exakt überein.

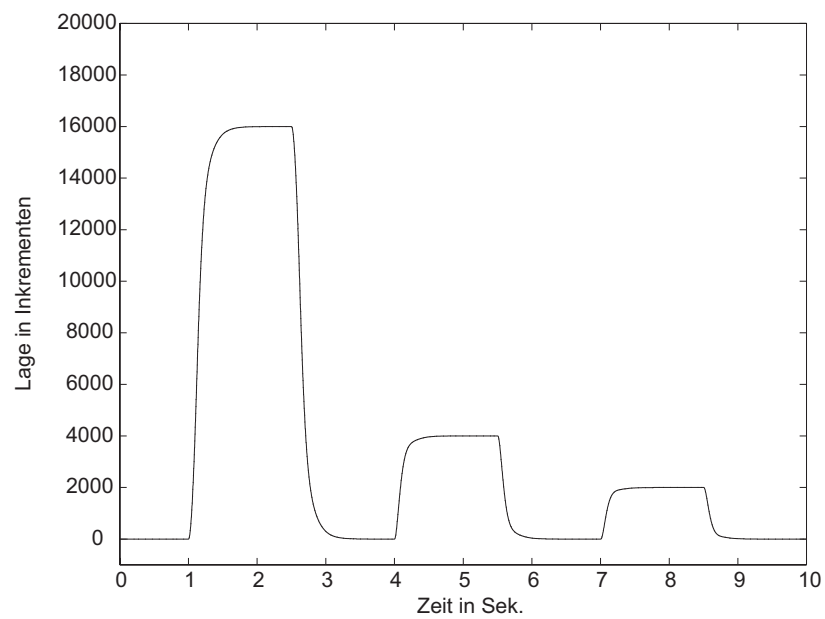
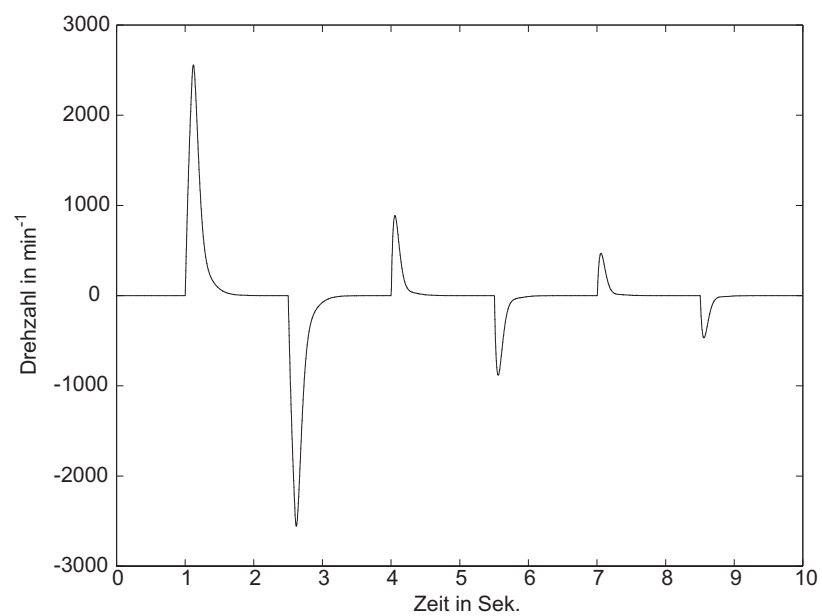


Bild 6.35: Lage-Istwerte des Masters und der Slaves in Inkrementen bei synchronem Betrieb

Bild 6.36: Drehzahl des Master- und der Slave-Motoren in  $\text{min}^{-1}$  bei synchronem Betrieb

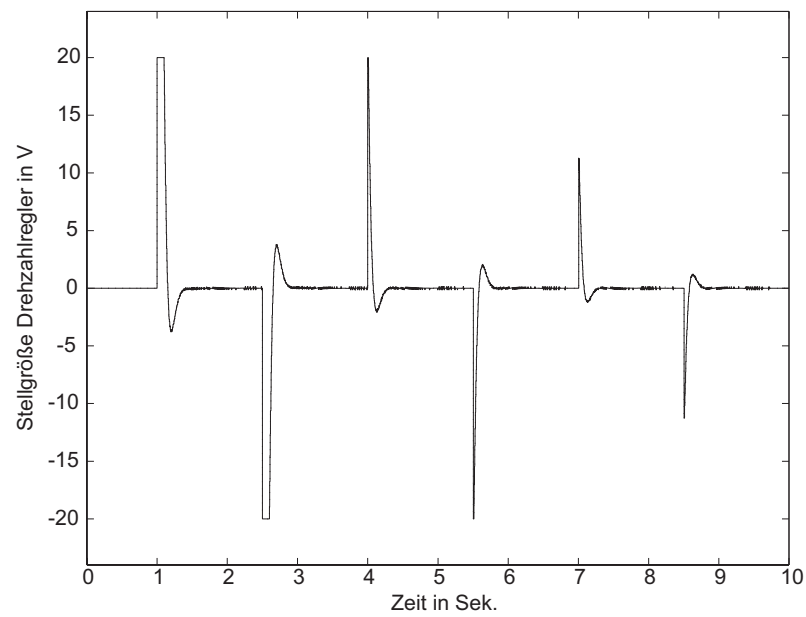


Bild 6.37: Stellgrößen der Drehzahlregler in Volt bei synchronem Betrieb

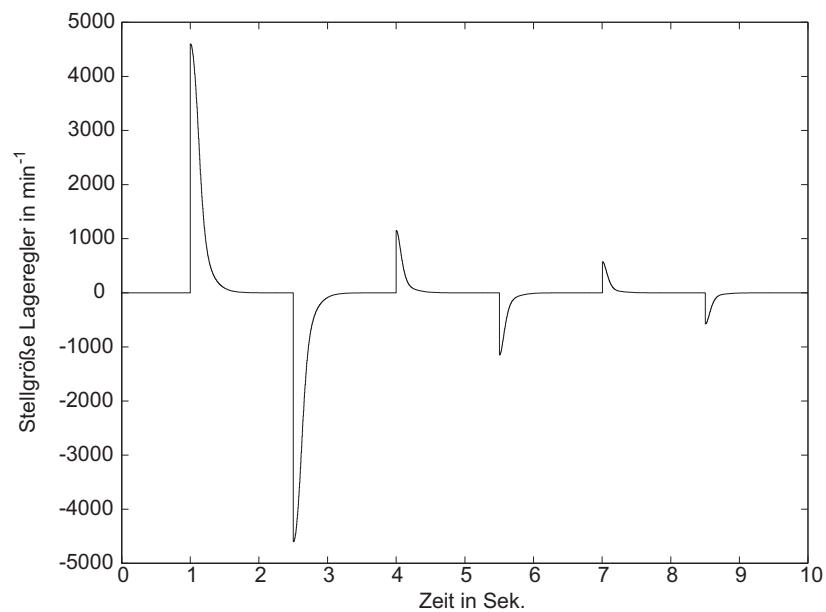


Bild 6.38: Stellgröße des Lagereglers in  $\text{min}^{-1}$  bei synchronem Betrieb

Auf die Darstellung der Stellgrößen der Versatzregler wurde hier verzichtet, da diese aufgrund der idealen Simulationsvoraussetzungen stets null betragen.



### 6.3.3 Messwerte der Lageregelung – asynchroner Betrieb

In diesem Abschnitt werden Messwerte zum Fall der Lageregelung für den asynchronen Fall präsentiert. Im Gegensatz zu den Messwerten aus Abschnitt 6.3.1 wurde hier das in Abschnitt 6.1.3 beschriebene nichtlineare Filter zur Glättung der Drehzahl-Istwerte eingesetzt.

Es soll, wie schon in früheren Abschnitten, zwischen den Fällen „Jittern um gleichzeitig aufgerufene Zyklen von Messwerterfassung und Regler“ und „Start des Messwertzykluses etwa in der Mitte zwischen zwei Regleraufrufen“ unterschieden werden.

Zugehörig zum ersten Fall, sind die Verläufe der Lagen der Slave-Motoren in Bild 6.39 dargestellt.

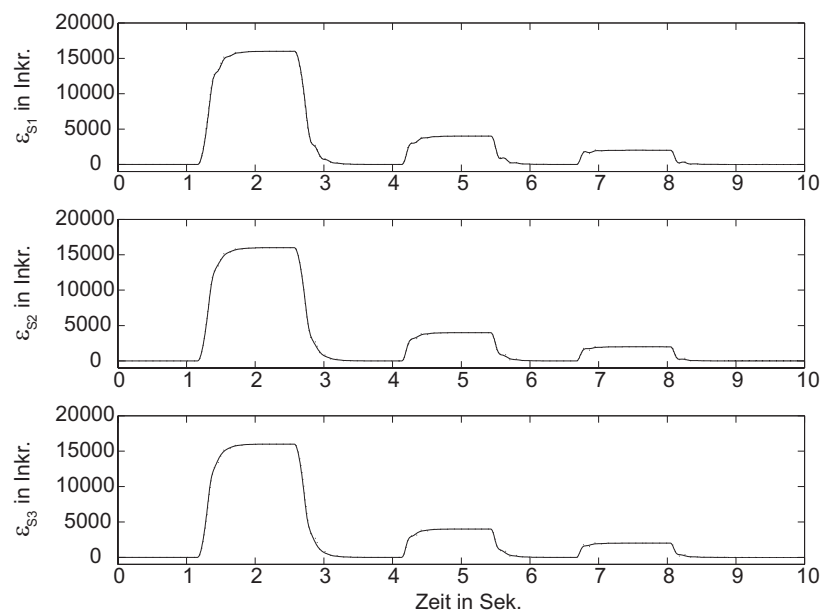


Bild 6.39: Lage-Istwerte der Slaves in Inkrementen bei asynchronem Betrieb und starkem Jittern

Die jeweils geringen Abweichungen der Lage zwischen dem Master-Motor und den Slaves sind zur besseren Verdeutlichung in Bild 6.40 dargestellt. Dort sind die Differenzen der Lagen  $\varepsilon_{Si} - \varepsilon_M$  aufgetragen.

Bei den Verläufen der Lagedifferenz ist deutlich die Auswirkung des Jitterns zu erkennen (Schwingungen). Für den eingeschwungenen Zustand stimmt die Istlage der Slaves mit der des Master jedoch überein.

Daran ändert sich auch im harmloseren Fall nichts, bei dem die Messwerterfassung stets neue Werte zwischen zwei Regleraufrufen liefert – siehe Bild 6.41 und Bild 6.42.

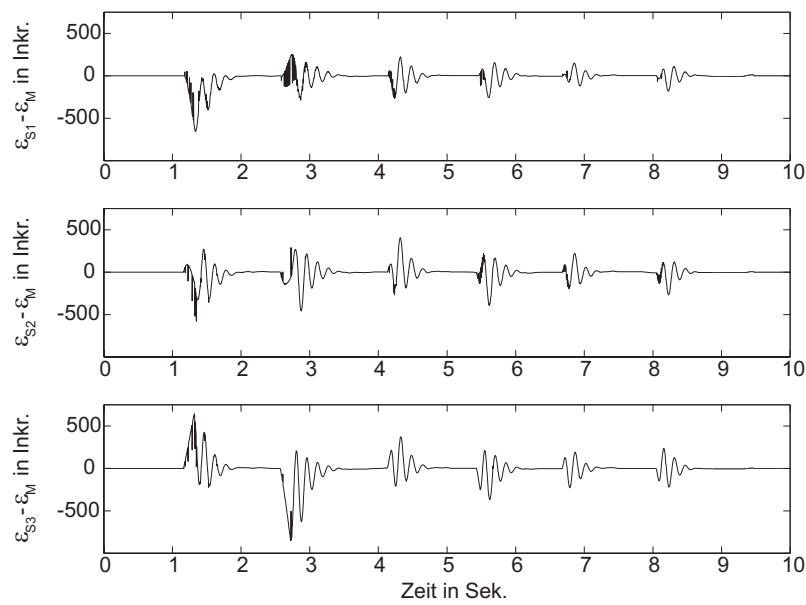


Bild 6.40: Lagedifferenzen in Inkrementen bei asynchronem Betrieb und starkem Jittern

Lediglich ein leicht glatterer Verlauf in der Differenz ist zu erkennen. Der Einfluss des Jitterns könnte eliminiert oder zumindest verringert werden, wenn ein Filter für die Lage-Istwerte eingesetzt würde. Damit würden schnelle, durch das Jittern hervorgerufene Änderungen in der gemessenen Lage reduziert, und der Verlauf wäre glatter.

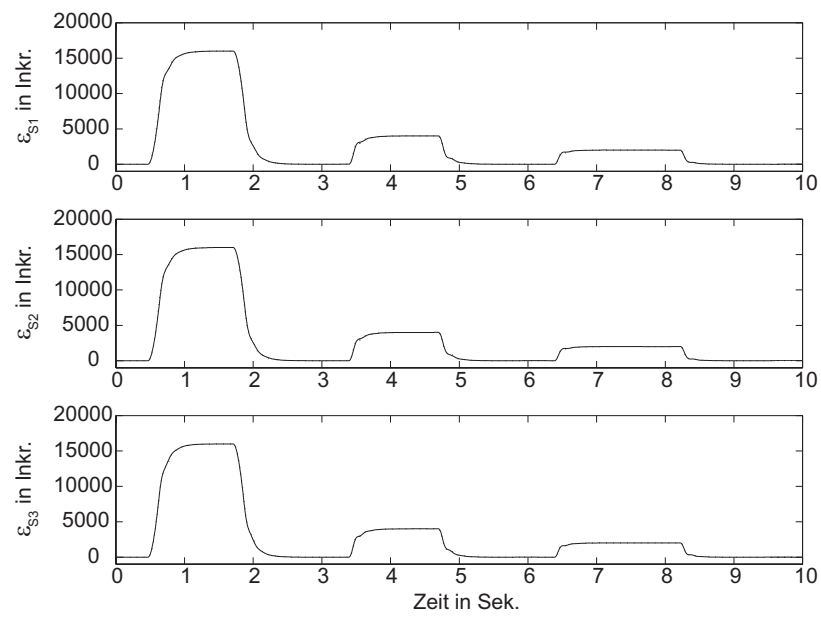


Bild 6.41: Lage-Istwerte der Slaves in Inkrementen bei asynchronem Betrieb und leichtem Jittern

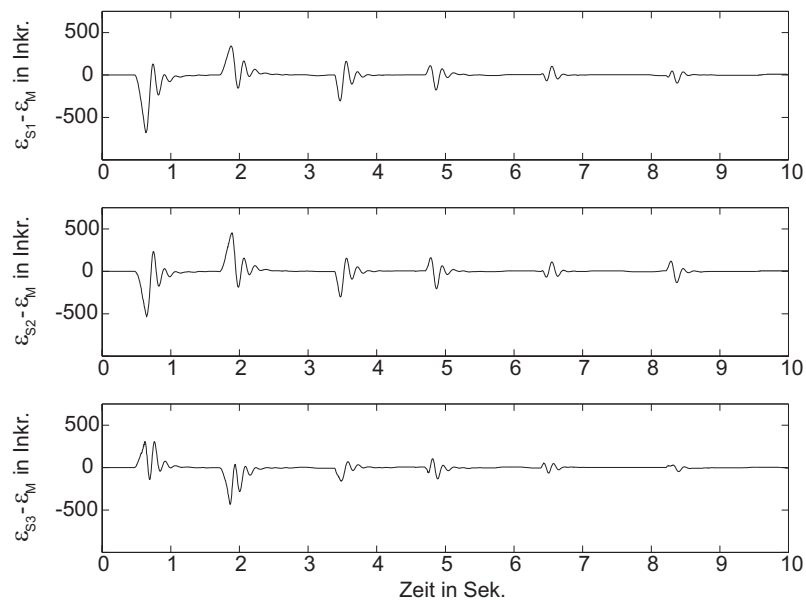


Bild 6.42: Lagedifferenzen in Inkrementen bei asynchronem Betrieb und leichtem Jittern

## 6.4 Stabilitätsuntersuchung am Prüfstand

Nachdem die Funktion der Regelung anhand des Prüfstandes nachgewiesen und auf Effekte durch das Jittern sowie auf Unzulänglichkeiten bei der Messwerterfassung eingegangen wurde, kann mit dem in Kapitel 3 entwickelten Verfahren zur Stabilitätsuntersuchung bei Anwesenheit von variablen Abtastzeiten bzw. Laufzeiten die Stabilität der entworfenen Regelung unter den tatsächlichen Umständen untersucht werden. Ziel ist es, die Stabilität des Gesamtsystems auch bei unbekannten Änderungen der Abtastzeit bzw. bei Anwesenheit von unbekannten veränderlichen Laufzeiten zu garantieren und einen zulässigen Bereich für die Abtastzeit anzugeben.

Dazu werden die in Abschnitt 3.6 vorgestellten Schritte für den Prüfstand Punkt für Punkt durchgeführt:

1. Modellierung der kontinuierlichen Strecke  $G(s)$
2. Beschreibung des zeitdiskreten Reglers  $K(z)$
3. Transformation des Reglers mit Hilfe der bilinearen Transformation in den Frequenzbereich  $K(z) \rightarrow K(s)$
4. Modellierung des Einflusses der Abtastzeit als strukturierte Unsicherheit  $\Delta_s$  ausgedrückt als lineare Fraktionaltransformationen
5. Berücksichtigung des Fehlers durch Anwendung der bilinearen Transformation als unstrukturierte Unsicherheit  $\Delta_u$
6. Zusammenfassen der Unsicherheiten  $\Delta_s$  und  $\Delta_u$  zur Gesamtunsicherheit  $\Delta$  und Zusammenfassen des Systems zu einem Block  $M$
7. Untersuchung der robusten Stabilität für das Systems  $M$  bei Anwesenheit der Unsicherheiten  $\Delta$

### 6.4.1 Modellierung der Strecke

Die für die Stabilitätsuntersuchung relevanten Streckenteile müssen zunächst zu einem System  $G$  zusammengefasst werden. Dazu gehören die in Abschnitt 5.1.2 hergeleiteten Modelle für die Motoren, deren Parameter aus Abschnitt 5.1.3, die Modelle und Parameter für die Stellglieder aus Abschnitt 5.1.4, sowie die Gleichungen zur Berechnung der Regelgrößen.

Die den weiteren Untersuchungen zugrundegelegte Strecke ist in Bild 6.43 dargestellt.

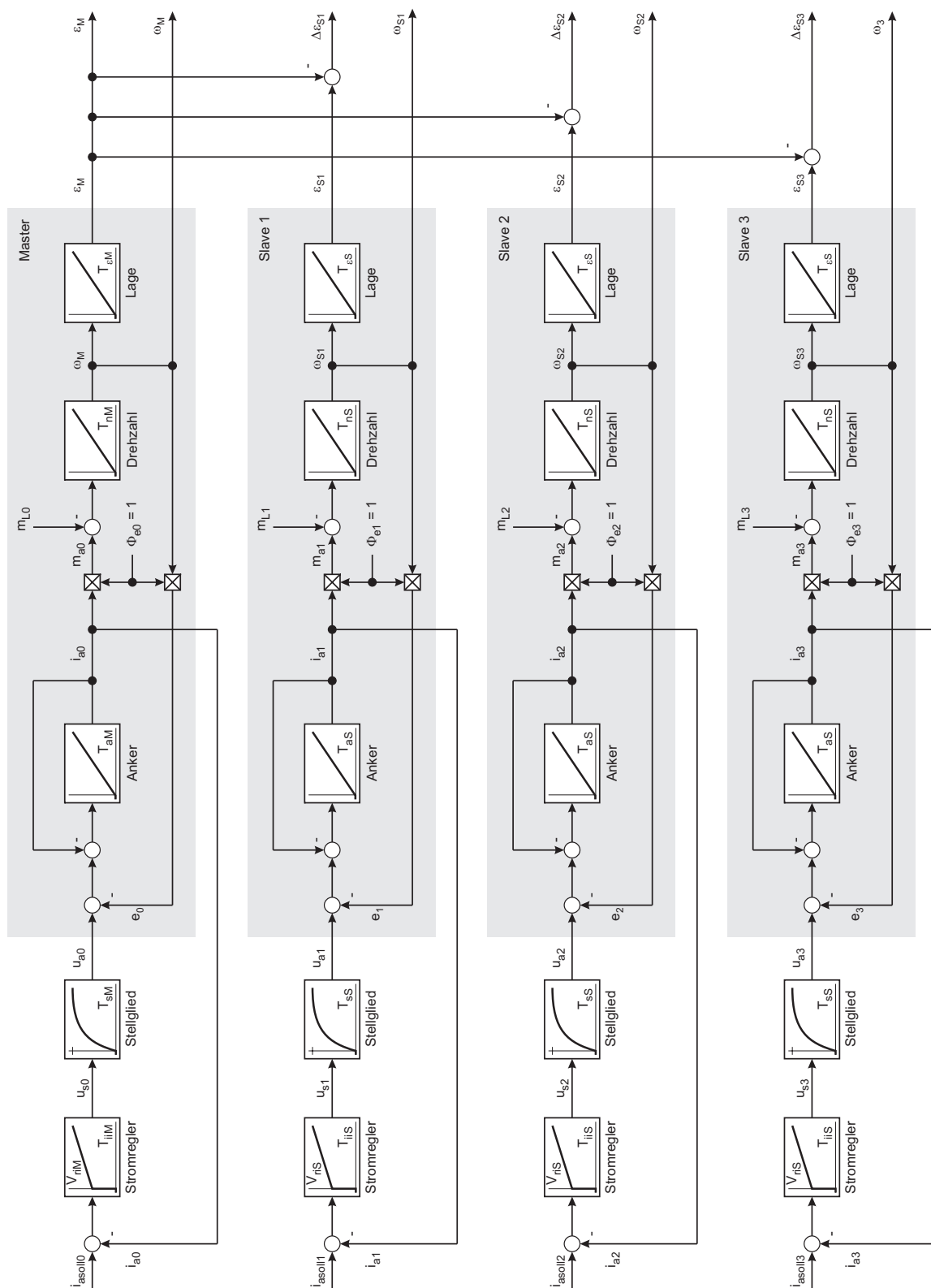


Bild 6.43: Strecke für Stabilitätsuntersuchung

Da die Stromregler in Hardware implementiert und im Stellglied integriert sind, unterliegen diese nicht der Variation der Abtastzeit und sind somit Teil des Systems  $G$  und werden nicht den Reglern zugeordnet.

Die Eingangsgrößen  $u$  des Systems sind die Stellgrößen der Regler, also die Strom-Sollwerte für die Stellglieder. Die Ausgangsgrößen  $y$  sind die Messgrößen der Drehzahlen und der Lage des Masters bzw. die Differenzlagen zwischen Slaves und Master der einzelnen Motoren und ergeben sich zu:

$$u = \begin{bmatrix} i_{asoll0} & i_{asoll1} & i_{asoll2} & i_{asoll3} \end{bmatrix}^T \quad (6.7)$$

$$y = \begin{bmatrix} \varepsilon_M & \omega_M & \Delta\varepsilon_{S1} & \omega_{S1} & \Delta\varepsilon_{S2} & \omega_{S2} & \Delta\varepsilon_{S3} & \omega_{S3} \end{bmatrix}^T \quad (6.8)$$

Abkürzend kann das in Bild 6.43 gezeigte System auch als Strecke  $G$  gemäß Bild 6.44 dargestellt werden.

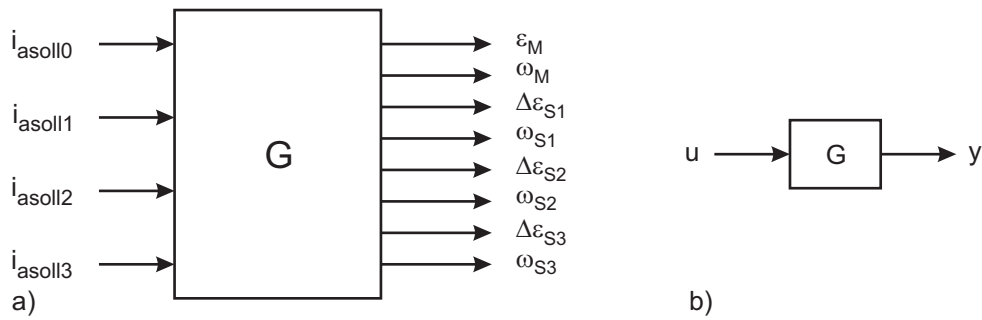


Bild 6.44: Darstellung des Versuchsstandes als verallgemeinerte Strecke  $G$  mit a) skalaren Größen und b) vektoriellen Größen)

## 6.4.2 Beschreibung der Regler

Im nächsten Schritt sind die Regler zu beschreiben. Diese wurden in Abschnitt 5.3.1 für den Drehzahlregler, in Abschnitt 5.3.2 für den Differenzlagereger und in Abschnitt 5.3.3 für den Lagereger hergeleitet.

Die PI-Regler für die Drehzahl  $K_\omega(z)$  ergeben sich nach Glg. (5.41) zu

$$K_\omega(z) = V_{r\omega} \frac{\left(1 + \frac{T_0}{T_{i\omega}}\right) z - 1}{z - 1} \quad (6.9)$$

mit

$$V_{r\omega} = 4,718 \quad (6.10)$$

$$T_{i\omega} = 82,51 \text{ ms} \quad (6.11)$$

$$T_0 = 4 \text{ ms} . \quad (6.12)$$

Die Differenzlagereger  $K_\Delta(z)$  für die Slaves wurden nach Glg. (5.43) zu

$$K_\Delta(z) = V_\Delta = 0,1 \quad (6.13)$$

bestimmt. Der überlagerte Lagereger  $K_\varepsilon(z)$  für den Master ergibt sich nach Glg. (5.45) zu

$$K_\varepsilon(z) = V_\varepsilon = 0,1 . \quad (6.14)$$

### 6.4.3 Bilineare Transformation der Regler

Gemäß Abschnitt 3.2 werden die einzelnen Regler mit Hilfe der bilinearen Transformation nach Glg. (3.3) in den Frequenzbereich transformiert, um explizit den Einfluss der Abtastzeit berücksichtigen zu können.

Da es sich bei den Differenzlagereglern für die Slaves und dem Lagereger für den Master um reine Proportionalregler handelt, die keinerlei Dynamik aufweisen, brauchen im Folgenden nur die als PI-Regler ausgelegten Drehzahlregler transformiert werden.

Nach Anwenden der bilinearen Transformation ergibt sich für den zeitdiskreten Drehzahlregler  $K_\omega(z)$  sein kontinuierliches Äquivalent  $K_\omega(s)$  zu

$$K_\omega(s) = V_{r\omega} \left( 1 + \frac{T_0}{2T_{i\omega}} \right) + V_{r\omega} \frac{T_0}{T_{i\omega}T} \frac{1}{s} . \quad (6.15)$$

Abkürzend werden im Folgenden die beiden Konstanten  $k_P$  und  $k_I$  für den Proportionalzweig bzw. den Integralzweig des Reglers definiert und ergeben sich zu

$$k_P = V_{r\omega} \left( 1 + \frac{T_0}{2T_{i\omega}} \right) \quad (6.16)$$

$$k_I = V_{r\omega} \frac{T_0}{T_{i\omega}} . \quad (6.17)$$

Die Übertragungsfunktion des Drehzahlreglers kann damit angegeben werden als

$$K_\omega(s) = k_P + k_I \frac{1}{T} \frac{1}{s}. \quad (6.18)$$

Der nichtlineare Einfluss der Abtastzeit ist in Bild 6.45 deutlich zu erkennen.

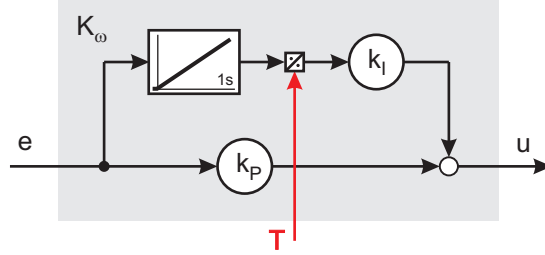


Bild 6.45: Struktur des Drehzahlreglers mit nichtlinearem Eingriff der Abtastzeit

Für die Differenzlagereger der Slaves sowie für den Lagereger des Masters gilt

$$K_\Delta(s) = K_\Delta(z) = V_\Delta \quad (6.19)$$

$$K_\varepsilon(s) = K_\varepsilon(z) = V_\varepsilon. \quad (6.20)$$

Die Blockschaltbilder beider Reglertypen sind in Bild 6.46 dargestellt.



Bild 6.46: a.) Differenzlagereger  $K_\Delta(s)$  b.) Lagereger  $K_\varepsilon(s)$

#### 6.4.4 Modellierung der Abtastzeit als strukturierte Unsicherheit

Wie in Abschnitt 3.3 anhand des Beispiels gezeigt, wird der nichtlineare Einfluss der Abtastzeit  $T$  in Glg. (6.18) durch eine strukturierte Unsicherheit  $\delta$  gemäß Glg. (3.7) modelliert.  $\alpha$  stellt dabei den Parameter zur Spezifikation des Variationsbereiches der Abtastzeit durch die Unsicherheit dar.

Bild 6.47 zeigt die sich ergebende Struktur für jeden der vier PI-Regler, die es für die folgende Stabilitätsuntersuchung erlaubt, die Variation der Abtastzeit durch ein lineares System zu beschreiben.



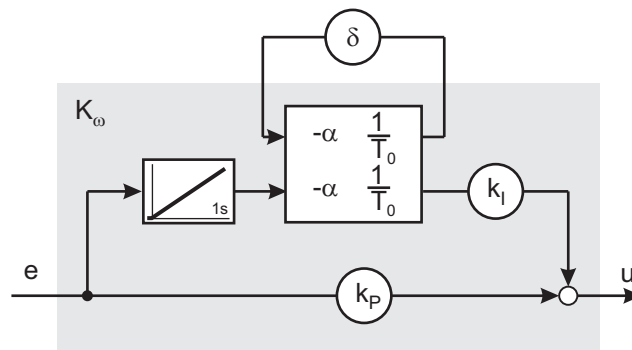


Bild 6.47: Struktur der Drehzahlregler mit Unsicherheit  $\delta$  zur Berücksichtigung der variablen Abtastzeit für die Stabilitätsanalyse

### 6.4.5 Modellierung der Fehler als unstrukturierte Unsicherheit

Durch Anwendung der bilinearen Transformation als Näherung für die  $z$ -Transformation muss der dadurch verursachte Fehler bei den PI-Reglern berücksichtigt werden. In Abschnitt 3.4 wurde vorgestellt, wie dieser Fehler durch Einbringen einer unstrukturierten Unsicherheit  $\delta_u$  für die weiteren Untersuchungen berücksichtigt werden kann.

Bild 6.48 zeigt diese Berücksichtigung innerhalb der PI-Regler für den konkreten Fall.

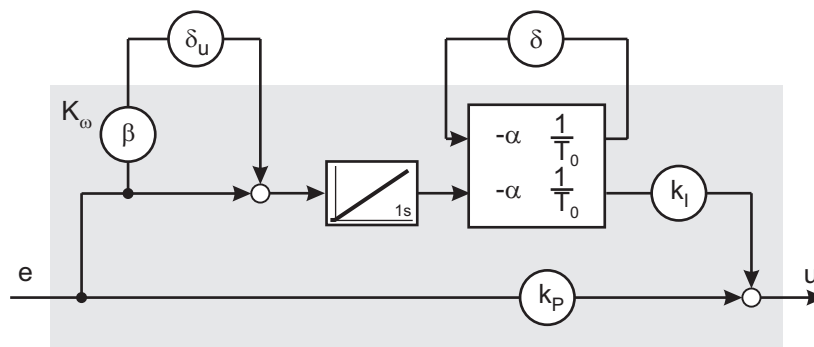


Bild 6.48: Berücksichtigung des Fehlers durch Einsatz der bilinearen Transformation durch Einbringen einer unstrukturierten Unsicherheit  $\delta_u$  bei den Drehzahlreglern

### 6.4.6 Definition der Gesamtunsicherheit

Die in den vorherigen beiden Abschnitten eingeführten strukturierten und unstrukturierten Unsicherheiten in den Drehzahlreglern, können in einem nächsten Schritt zu einer Gesamtunsicherheit für jeden Regler zusammengefasst werden.

Die Gesamtunsicherheit  $\Delta$  berechnet sich dabei zu  $\Delta = \begin{bmatrix} \delta_u & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$ .

Bild 6.49 zeigt die sich daraus ergebende Struktur für jeden der Drehzahlregler.

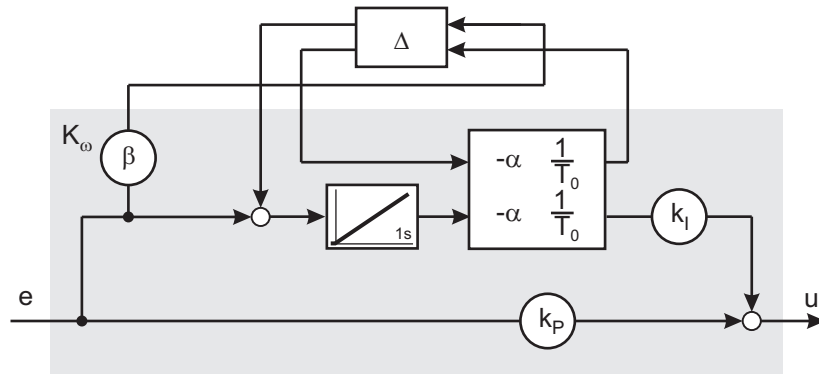


Bild 6.49: Struktur der Drehzahlregler mit zusammengefassten strukturierten und unstrukturierten Unsicherheiten

Die Kenntniss des Einflusses der Abtastzeit und die Berücksichtigung des Fehlers der bilinearen Transformation für den Regler lässt es zu, den Gesamtregler gemäß Bild 6.50, bestehend aus den vier Drehzahlreglern, dem Lageregler und den drei Differenzlagereglern, in einem Blockschaltbild anzugeben.

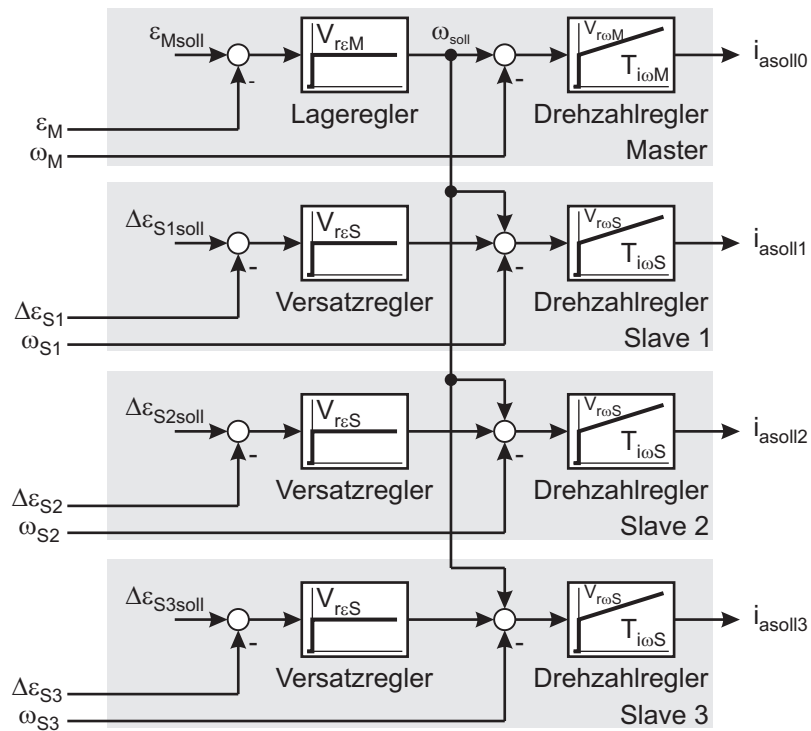


Bild 6.50: Gesamtstruktur der Regler

Bild 6.51 verdeutlicht den Einfluss der Unsicherheiten.

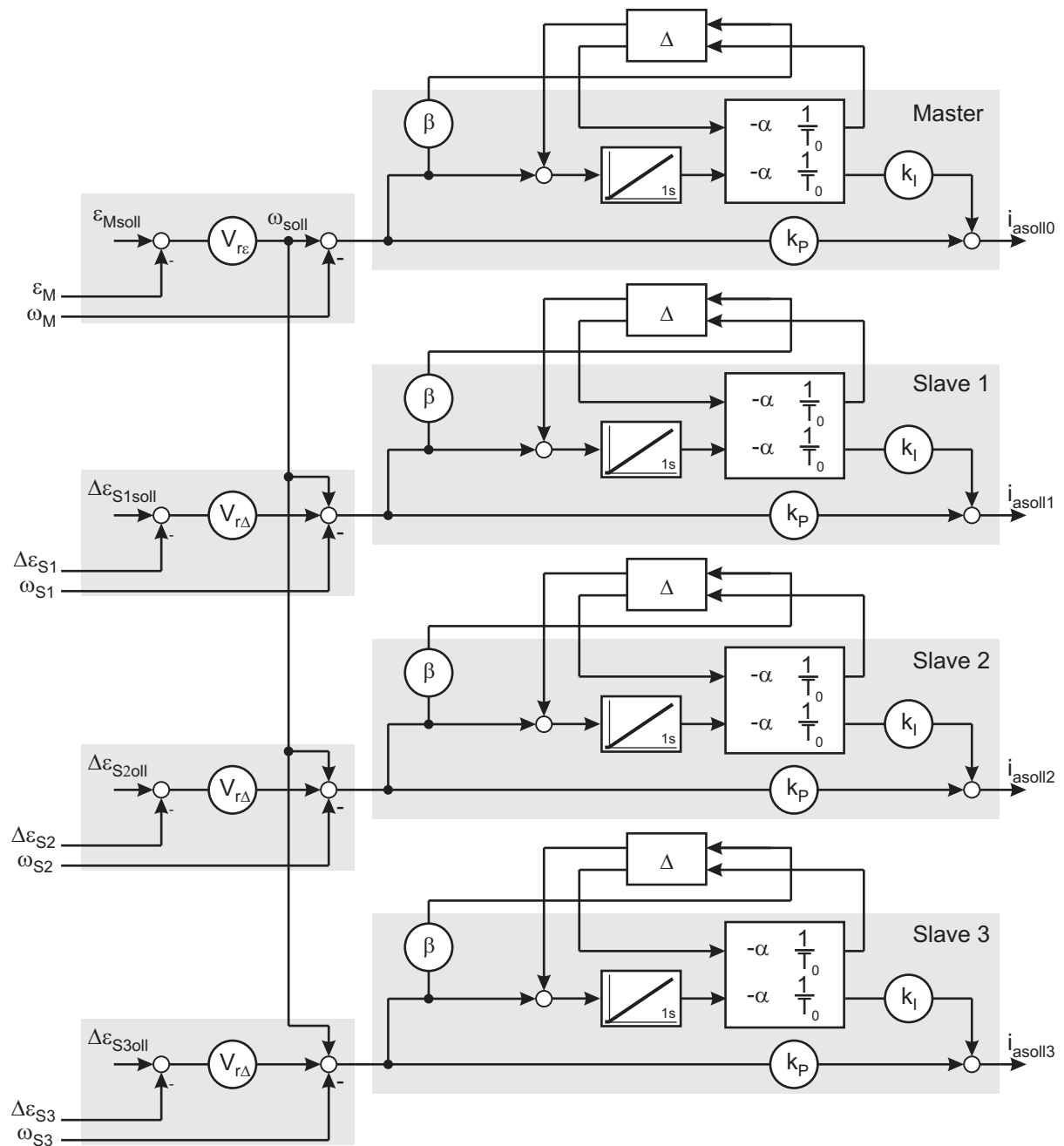


Bild 6.51: Gesamtstruktur der Regler unter Einbezug der Unsicherheiten

Die einzelnen Unsicherheitsblöcke  $\Delta$  pro Regler können zu einer Gesamtsystemunsicherheit  $\Delta_{sys}$  zusammengefasst werden. D. h. für den Fall des Versuchsstandes besteht  $\Delta_{sys}$  aus den vier Unsicherheitsblöcken  $\Delta$  der Drehzahlregler. Weitere Unsicherheiten treten hier nicht auf, da die Differenzlagereger sowie der Lagereger aus reinen Proportionalreglern bestehen und damit unabhängig von der Abtastzeit sind.

Nach Zusammenfassen der in Bild 6.51 grau hinterlegten Elemente zu einem Gesamtregler  $K$  ergibt sich die Übertragungsfunktion des „unsicheren“ Reglers zu einer linearen Fraktionaltransformation

$$T_{uy} = \text{LFT}_u(K, \Delta_{\text{sys}}), \quad (6.21)$$

bestehend aus dem Reglerblock  $K$  und den Unsicherheiten  $\Delta_{\text{sys}}$ . Dieser Zusammenhang ist in Bild 6.52 dargestellt.

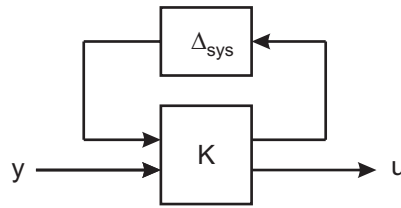


Bild 6.52: Zusammenfassung aller Regler und Unsicherheiten zu den Blöcken  $K$  und  $\Delta_{\text{sys}}$

In dem Block  $\Delta_{\text{sys}}$  sind dabei alle Unsicherheiten des Systems zusammengefasst. Die Systemunsicherheit  $\Delta_{\text{sys}}$  berechnet sich daher zu

$$\Delta_{\text{sys}} = \begin{bmatrix} \Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta \end{bmatrix}. \quad (6.22)$$

Nachdem alle für die Stabilitätsanalyse benötigten Teilsysteme bestimmt wurden, wird das System in eine für die Untersuchung geeignete Form gebracht. Diese Form wurde in Abschnitt 3.5 definiert und ist in Bild 6.53 dargestellt.

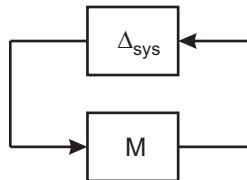


Bild 6.53: Standardform zur Stabilitätsuntersuchung

Der darin enthaltene Block  $M$  setzt sich aus dem Regler  $K$  und der Strecke  $G$  zusammen. Er lässt sich als lineare Fraktionaltransformation

$$M = \text{LFT}(K, G) \quad (6.23)$$

angeben und stellt das der folgenden Untersuchung zugrunde liegende Gesamtsystem dar. Der Block  $M$  beinhaltet dabei die vier Antriebe, die zugehörigen Stellglieder, die Messwertfassung und -übertragung, die von der Abtastzeit unabhängigen Teile der Drehzahlregler, die Differenzlagereger, den Lagereger sowie Anpass- und Skalierungsterme.

### 6.4.7 Untersuchung des Systems auf robuste Stabilität

Um die Stabilität auch bei Anwesenheit einer veränderlichen Abtastzeit bzw. bei Jittern der Buslaufzeiten garantieren zu können, ist gemäß Abschnitt 3.5 der strukturierte singuläre Wert  $\mu_{\Delta}(M)$  der eben berechneten Funktion  $M$  zu bestimmen. Dazu wurde im vorliegenden Fall die  $\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox [5] des Simulationsprogramms MATLAB [54] verwendet.

Das folgende Diagramm 6.54 zeigt den Verlauf des strukturierten singulären Wertes für den Versuchsstand, bei einer angenommenen Unsicherheit der Abtastzeit von  $\pm 50\%$  um den nominellen Wert von  $T_0 = 4$  ms. Dies entspricht einem Skalierungswert für die Unsicherheiten von  $\alpha = 0,5$ . In den Diagrammen stellt die durchgezogene Linie die Obergrenze für den strukturierten singulären Wert dar, die gestrichelte Linie dagegen die Untergrenze. Beide Kurven liegen dicht beieinander.

Es ist zu erkennen, dass das Maximum des strukturierten singulären Wertes annähernd an die hergeleitete Stabilitätsgrenze von 1 herankommt, aber stets kleiner als 1 ist. Damit kann garantiert werden, dass der angenommene Variationsbereich für die Abtastzeit von

$$T = T_0 (1 + \alpha \delta) \quad \text{mit} \quad \delta \in [-1, 1] \quad (6.24)$$

zu einem stabilen System führt. Berechnet man numerisch das Maximum des strukturierten singulären Wertes, so ergibt sich  $\gamma = 0,92$ , sodass sich der garantiert stabile Bereich gemäß Glg. (3.17) angeben lässt:

$$T = T_0 \left( 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \delta \right) = T_0 \left( 1 + \frac{\alpha}{0,92} \delta \right) \quad \text{mit} \quad \delta \in [-1, 1] \quad (6.25)$$

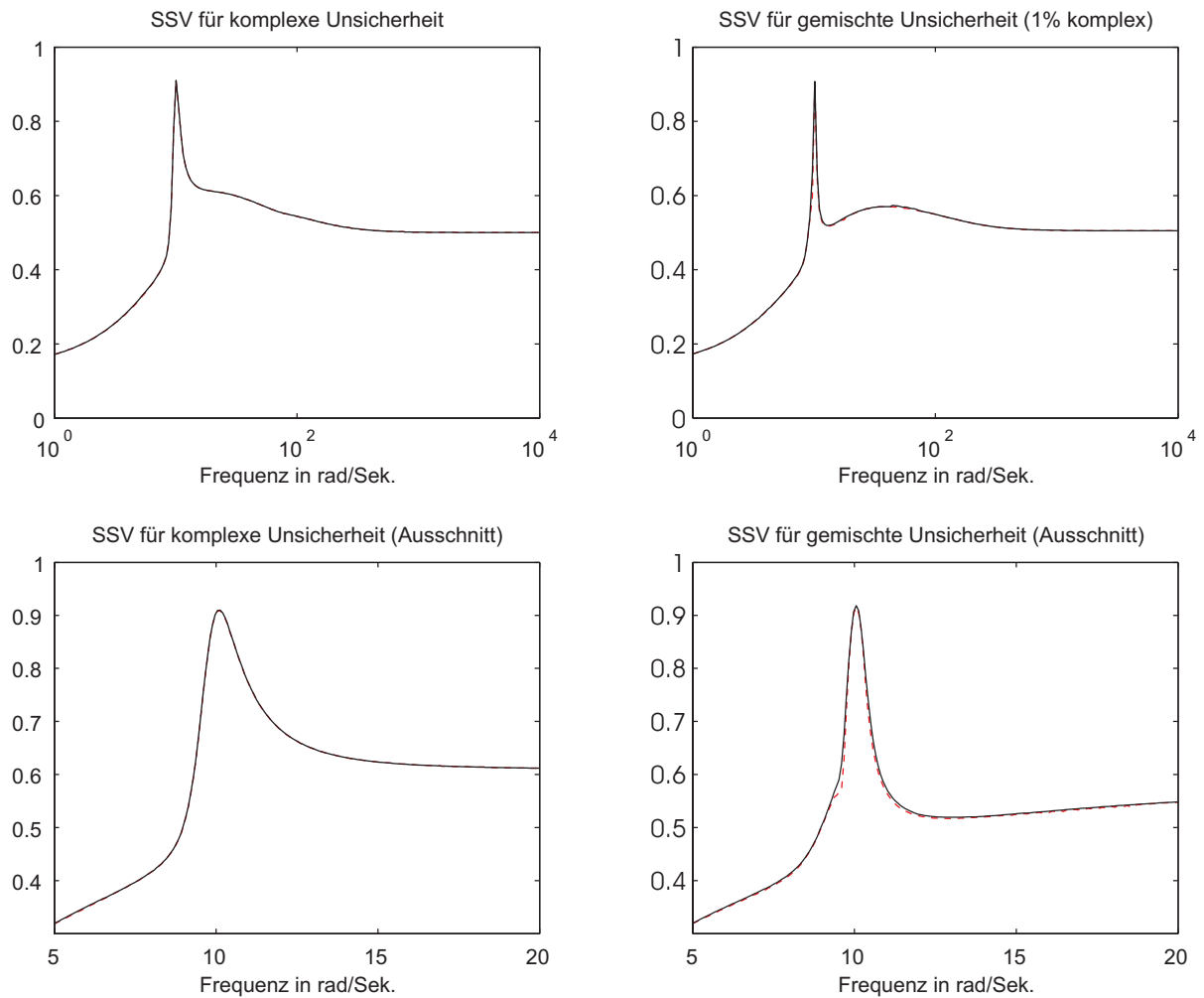


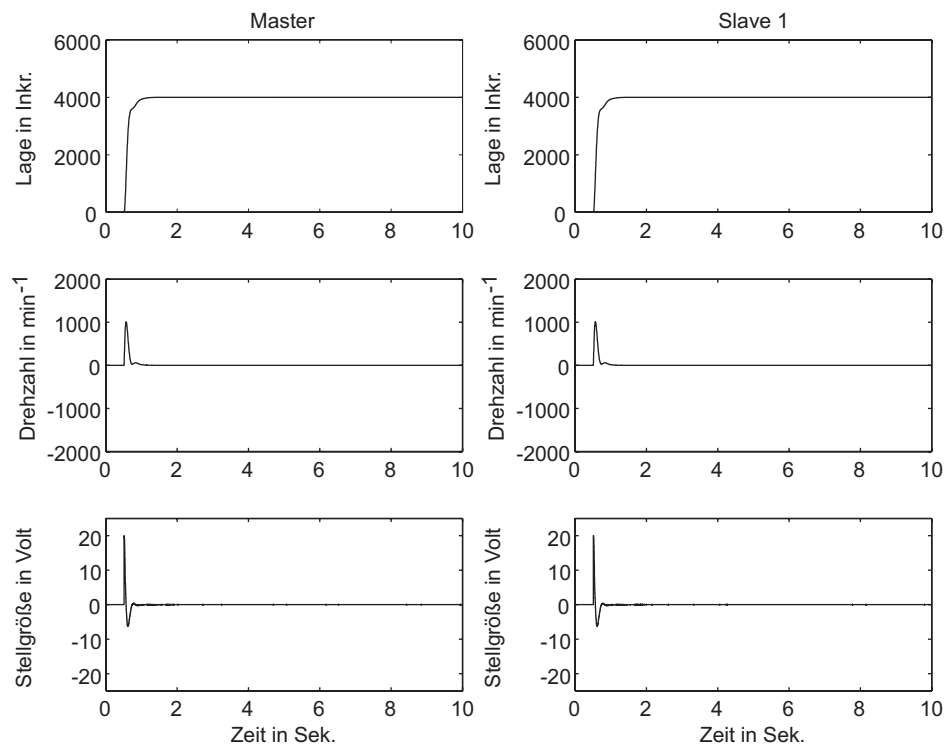
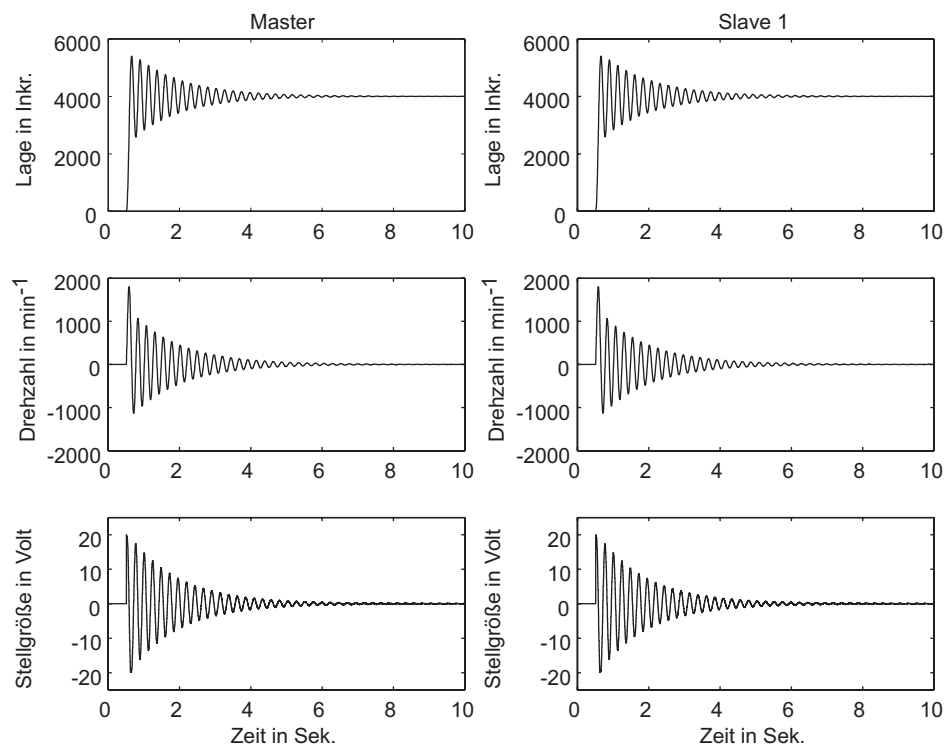
Bild 6.54: Verlauf des strukturierten singulären Wertes für den Versuchsstand bei  $\alpha = 0,5$

Eine sich beliebig verändernde Abtastzeit im Bereich von

$$T_{\min} = 1,826\text{ms} < T < T_{\max} = 6,174\text{ms}$$

kann nicht zu Instabilität führen. Das System ist in diesem Bereich robust stabil bzgl. einer veränderlichen Abtastzeit.

Abschließend werden in den Bildern 6.55 bis 6.58 einige Messungen am Versuchsstand vorgestellt, die bei einer konstanten Abtastzeit von  $T = T_0 = 4\text{ ms}$  (Bild 6.55), bei einer Abtastzeit von  $T = 1,85\text{ ms}$  knapp innerhalb des garantiert stabilen Bereichs (Bild 6.56), bei einer Abtastzeit von  $T = 1,75\text{ ms} < T_{\min}$  (Bild 6.57) und bei einer Abtastzeit von  $T = 1,70\text{ ms}$  (Bild 6.58) erfolgten. Dazu wurde jeweils ein Sollwertsprung auf den Lageregler in Höhe von 4000 Inkrementen gegeben.

Bild 6.55: Antwort des Systems auf Lagesprung von 4000 Inkrementen bei  $T = T_0$ Bild 6.56: Antwort des Systems auf Lagesprung von 4000 Inkrementen bei  $T = 1,85 \text{ ms}$

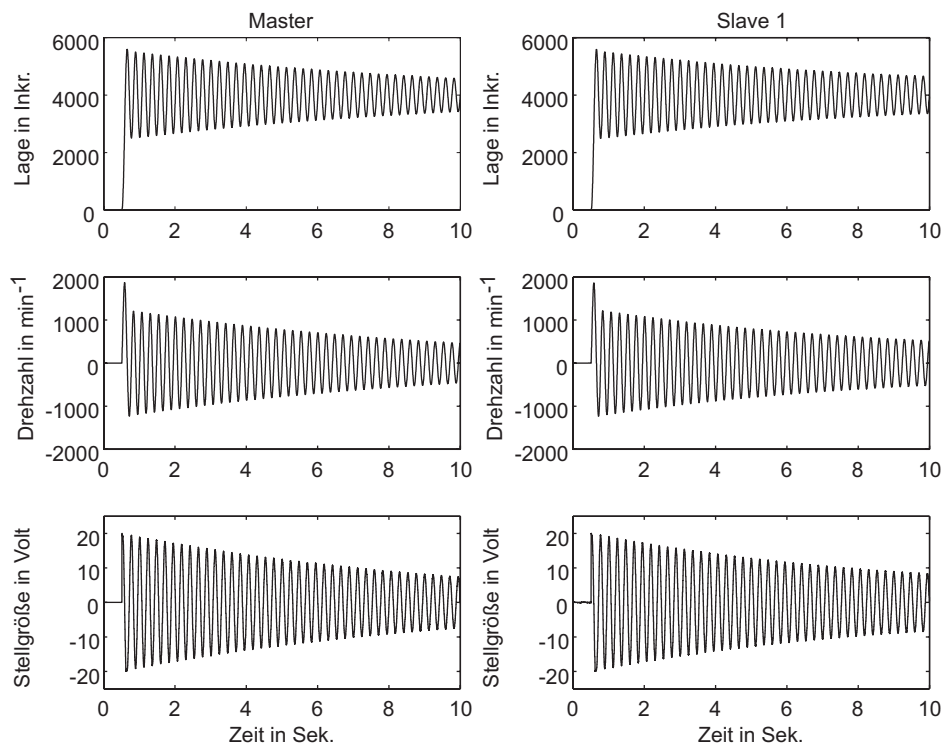


Bild 6.57: Antwort des Systems auf Lagesprung von 4000 Inkrementen  $T = 1,75$  ms

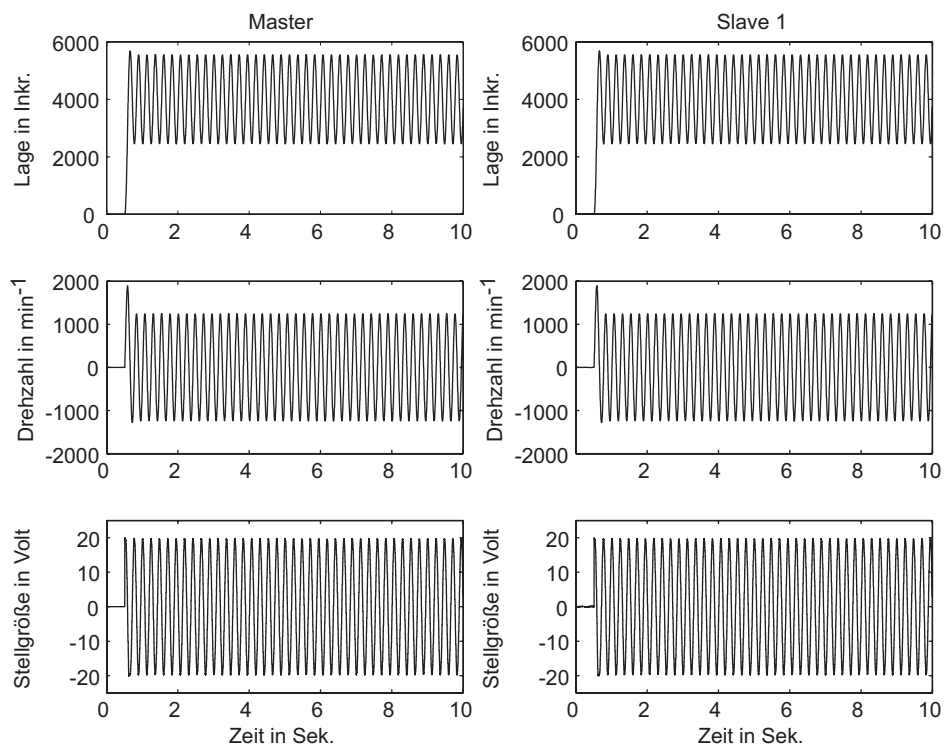


Bild 6.58: Antwort des Systems auf Lagesprung von 4000 Inkrementen  $T = 1,70$  ms



Bild 6.55 zeigt den erwarteten Verlauf für das nominelle System.

In Bild 6.56 ist zu erkennen, dass knapp innerhalb des berechneten stabilen Bereiches das System stark entdämpft ist und sich eine schwach gedämpfte abklingende Schwingung einstellt. Das System ist wie berechnet stabil.

In Bild 6.57, mit einer Abtastzeit von  $T = 1,75$  ms knapp außerhalb des als stabil berechneten Bereiches, stellt sich ebenfalls eine schwach gedämpfte Schwingung ein. Dies scheint im ersten Moment verwunderlich zu sein, ist aber plausibel, da durch die vorgestellte Methode zwar Stabilität garantiert, nicht aber Instabilität festgestellt werden kann. Ein Grund dafür, dass der stabile Bereich etwas größer als berechnet ist, ist der verwendete konservative Ansatz zur Berücksichtigung des Fehlers bei Anwendung der bilinearen Transformation. In der Regel sind die real auftretenden Fehler wesentlich kleiner als die angegebenen 14 %.

Erst bei einer weiteren leichten Verringerung der Abtastzeit um  $50 \mu\text{s}$  auf  $T = 1,70$  ms tritt eine Dauerschwingung auf. Dies ist in Bild 6.58 dargestellt. Dass das System hier nicht aufklingt liegt darin begründet, dass die in Hardware implementierten Stromregler eine Begrenzung der Ausgangsspannung auf 20 V aufweisen. Das Eintreten in die Begrenzungen ist deutlich im Stellgrößenverlauf des Bildes 6.58 zu erkennen. Wäre diese Begrenzung nicht vorhanden, würden sich aufklingende Schwingungen ausbilden und die Amplituden des Systems über alle Grenzen wachsen, was im Endeffekt zu einer Zerstörung des Systems führen würde.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass das in Kapitel 3 vorgestellte Verfahren zur Stabilitätsprüfung von Systemen mit nicht konstanten Abtastzeiten bzw. variablen Laufzeiten anhand des Prüfstandes für eine Gleichlaufregelung von vier Motoren verifiziert wurde. Die dargestellten Messungen am Versuchsstand bestätigen die theoretischen Überlegungen, die auf einer Stabilitätsprüfung für Systeme mit Unsicherheiten basieren. Hierzu wurde der Einfluss der sich verändernden Abtastzeit als Unsicherheit aufgefasst, um so robuste Stabilität des Systems im durch die Unsicherheiten spezifizierten Rahmen gewährleisten zu können.

Es sei abschließend noch einmal darauf hingewiesen, dass mit dem vorgestellten Verfahren zur Stabilitätsprüfung bei hybriden Systemen mit nicht konstanter Abtastung zwar Stabilität in einem berechnetem Bereich garantiert werden kann, der Umkehrschluss, dass das System außerhalb dieses Bereiches automatisch instabil wird, aber nicht zulässig ist. Dies liegt, wie schon erwähnt, zum einen an dem konservativen Ansatz der Berücksichtigung des Fehlers der bilinearen Transformation begründet, der in der Regel einen größeren Fehler berücksichtigt, als wirklich vorliegt. Zum anderen aber auch daran, dass reales Jittern für die

Abtastzeit meist mit einem Mittelwert um den nominellen Wert stattfindet, die Modellierung mit Unsicherheiten dagegen einen völlig beliebigen Verlauf zulässt.

Die Praxis hat gezeigt, dass die realen Stabilitätsgrenzen nur leicht außerhalb der berechneten liegen und das Verfahren damit sehr gut zur Stabilitätsprüfung anwendbar ist.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Verfahren zur Stabilitätsprüfung von Systemen mit nicht konstanter Abtastzeit entwickelt. Die Variation der Abtastzeit wurde für die Stabilitätsanalyse in einem ersten Schritt explizit durch einen nichtlinearen Eingriff modelliert und im weiteren Verlauf als lineare Fraktionaltransformation durch eine strukturierte Unsicherheit beschrieben. Diese Unsicherheit spezifiziert zusammen mit einem Skalierungsfaktor die zu untersuchende Variationsbreite der Abtastzeit von ihrem nominellen Wert.

Der große Vorteil der Darstellung des Systems als lineare Fraktionaltransformation mit Unsicherheiten ist, dass sich ein komplett lineares System ergibt. Die zeitdiskret vorliegenden Regler werden mit Hilfe der bilinearen Transformation in den Frequenzbereich transformiert. Bei dieser Transformation der Pole aus der  $z$ -Ebene in die  $s$ -Ebene wird prinzipbedingt gegenüber dem Einsatz der exakten  $z$ -Transformation ein Fehler begangen. Dieser Fehler wird im weiteren Verlauf der Untersuchungen als unstrukturierte Unsicherheit beschrieben und so berücksichtigt. Das sich ergebende lineare kontinuierliche System kann auf robuste Stabilität in Bezug auf die spezifizierten Variationen der Abtastzeit untersucht werden. Als Ergebnis dieser Analyse kann ein garantiert stabiler Bereich für die Abtastzeit angegeben werden.

Um das Verfahren in der Praxis zu testen, wurde ein Versuchsstand aufgebaut. Dazu wurde das System modelliert und ein Regelkonzept für die Gleichlaufregelung von vier Antrieben entworfen, die Regler parametrisiert und in dem Prüfstand in einer SPS implementiert. Die Sensoren und Aktoren waren über den Feldbus Profibus-DP miteinander vernetzt. Anhand von Simulationen und realen Messungen zeigte sich in einem ersten Schritt, dass das modellierte System mit der Realität übereinstimmt. Anschließend wurde das entwickelte Verfahren zur Stabilitätsprüfung am Versuchsstand getestet und damit die erlaubte Variationsbreite für die Abtastzeit im konkreten Fall bestimmt. Zur Kontrolle wurde die ermittelte Abtastzeit an der Stabilitätsgrenze in der SPS eingestellt und anhand von Messungen überprüft, ob sich das System bei dieser Abtastzeit an der Stabilitätsgrenze befindet. Die berechnete Stabilitätsgrenze führte bei den Messungen zu einer schwach gedämpften Schwingung. Eine weitere kleine Verringerung der Abtastzeit auf Werte außerhalb des berechneten stabilen Bereichs

führte dann wie erwartet zu einer aufklingenden Schwingung und somit zur Instabilität des Systems.

Die vorgestellte Methode ist daher ein geeignetes Werkzeug, um die in der klassischen Regelungstechnik strikte Forderung nach äquidistanter Abtastzeit zu lockern und trotzdem eine Möglichkeit zu haben, um Stabilität für das geregelte System mit nicht konstanter Abtastung garantieren zu können. Die hier betrachteten Systeme mit Tiefpasscharakter können ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch auf andere lineare rationale Systeme erweitert werden, solange das nominelle geregelte System stabil ist.

Auf diese Arbeit aufbauende Untersuchungen könnten die vorgestellte Methode um eine Überprüfung auf robuste Regelqualität erweitern. Die vorgegebene Regelqualität könnte dann auch bei Anwesenheit von einer nicht konstanten Abtastzeit berücksichtigt und garantiert werden. Dazu wäre die gewünschte Regelqualität in Form von Gewichtungsfunktionen, Skalierungstermen und zusätzlichen Unsicherheitsblöcken zu modellieren und die im Rahmen dieser Arbeit zugrundegelegte Gesamtstruktur um diese Blöcke zu erweitern. Die vorgestellte Vorgehensweise ließe sich ohne weiteres auch auf die Modellierung der robusten Regelqualität übertragen. Das so erhaltene erweiterte Gesamtsystem könnte dann mit Hilfe des strukturierten singulären Wertes auf robuste Regelqualität überprüft werden.

In einem weiteren Schritt ließen sich die durch die Variation der Abtastzeit entstandenen Unsicherheiten schon direkt im Reglerentwurf berücksichtigen. Dazu könnten moderne Methoden für den Reglerentwurf wie etwa  $\mathcal{H}_2$ - oder  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm-optimale Regler oder die  $\mu$ -Synthese eingesetzt werden. Bei der  $\mu$ -Synthese kann explizit der Verlauf des strukturierten singulären Wertes  $\mu$  in einem iterativen Prozess mittels zweier Skalierungsmatrizen  $D$  und  $Q$  und dem durch  $\mathcal{H}_\infty$ -Entwurf berechneten Regler  $K$  minimiert werden. Die zuvor festgelegten Unsicherheiten zur Untersuchung der robusten Stabilität oder auch die Unsicherheiten zur Gewährleistung der robusten Regelqualität können ohne weiteres direkt im Entwurfsprozess berücksichtigt werden. Die  $\mu$ -Synthese würde dann sofort einen robust stabilen Regler bzw. einen Regler für robuste Regelqualität bereitstellen.

# Literatur

- [1] Aström, K.-J.; Wittenmark, B.  
Computer-Controlled Systems: Theory and Design. 2nd Ed.  
Prentice-Hall, 1990
- [2] Advanced Continuous Simulation Language (ACSL)  
Reference Manual, Version 11  
MGA Software, 1995
- [3] Alpcan, T.; Basar, T.; Tempo, R.  
Randomized Algorithms for Stability and Robustness Analysis of High Speed Communication Networks
- [4] Baker Jr., G. A.; Graves-Morris, P.  
Padé Approximants  
Cambridge University Press, 1996
- [5] Balas, Garry J.; Doyle, John C.; Glover, Keith  
 $\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox  
The MathWorks Inc., 1991
- [6] Boyd, S.; El Ghaoui, L.; Feron, E.; Balakrishnan, V.  
Linear Matrix Inequality in Systems and Control Theory  
ser. SIAM Studies in Applied Mathematics. Philadelphia, PA: SIAM, 1994
- [7] Braatz, R. D.; Young, P. M.; Doyle, J. C.; Morari, M.  
Computational Complexity of  $\mu$  Calculation  
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 39, No. 5, 1994
- [8] Branicky, M. S.; Phillips, S. M.; Zhan, W.  
Stability of Networked Control Systems: Explicit Analysis of Delay  
Proceedings of the American Control Conference, Chicago, 2000

- [9] Braslavsky, Julio  
Frequency Domain Analysis of Sampled-Data Control Systems  
Ph.D. Thesis, The University of Newcastle, New South Wales, Australia, 1995
- [10] Bronstein, Ilja N.; Semendjaev, Konstantin A.  
Taschenbuch der Mathematik  
Harri-Deutsch, 1993
- [11] Buttazzo, G.  
Real-time operating systems: problems and novel solutions  
Proc. 7th Int. Symp. Formal Techniques in Real-Time and Fault Tolerant Systems,  
Oldenburg, Germany, 2002, pp. 37-51
- [12] Castane, R.; Marti, P.; Velasco, M.; Cervin, A.; Henriksson, D.  
Resource management for control tasks based on the transient dynamics of closed-loop  
systems  
Proceedings of the 18th Euromicro Conference on Real-Time Systems, 2006, pp. 171-182
- [13] Cervin, A.; Eker, J.; Bernhardsson, B.; Arzen, K.-E.  
Feedback-feedforward scheduling of control tasks  
Real-Time Systems, vol. 23, no. 1/2, pp. 25–53, 2002
- [14] Cervin, A.; Henriksson, D.; Lincoln, B.; Eker, J.; Arzen, K.-E.  
How Does Control Timing Affect Performance  
IEEE Control Systems Magazine, 0272-1708/03/\$17.00, 2003
- [15] Chen, Tongwen; Francis, Bruce  
Input-Output Stability of Sampled-Data Systems  
IEEE, Transactions on Automatic Control, Vol. 36, No. 1, 1991
- [16] Daafouz, J.; Bernussou, J.  
Parameter dependent lyapunov functions for discrete time systems with time varying  
parametric uncertainties  
System Control Letter, vol. 43, pp. 355-359, 2001
- [17] Doyle, John C.  
A Review of  $\mu$  for Case Studies in Robust Control  
10th IFAC World Congress on Automatic Control, Vol. AC-26, 1981
- [18] Doyle, John C.  
Analysis of Feedback Systems with Structured Uncertainties  
IEE Proceedings, Vol. 133, Part D, 1982

- 
- [19] Doyle, John C.  
Structured Uncertainty in Control System Design  
Proceedings IEEE Conf. Dec. Control, 1983
- [20] Doyle, John C.; Francis, Bruce A.; Tannenbaum, Allen R.  
Feedback Control Theory  
Macmillian Publishing Company, 1992
- [21] Doyle, John C.; Glover, Keith  
State-Space Solutions to Standard  $H_2$  and  $H_\infty$  Control Problems  
IEEE TAC, Vol.34, No.8, 1989
- [22] Eymann, Thomas  
Reglerentwurf für Regelkreise in Feldebussystemen  
Fortschritt-Berichte VDI, Reihe 8, Nr. 886, 2001
- [23] Eslami, Mansour  
Theory of Sensitivity in Dynamic Systems  
Springer, 1994
- [24] Fan, M. K. H.; Tits, A. L.; Doyle, J. C.  
Robustness in the Presence of Mixed Parametric Uncertainty and Unmodeled Dynamics  
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-36, No. 1, 1991
- [25] Fischer, Wolfgang; Lieb, Ingo  
Funktionentheorie  
Vieweg, 1994
- [26] Francis, Bruce A.  
A Course in  $H_\infty$  Control Theory  
Springer, 1987
- [27] Francis, Bruce A.; Khargonekar, Pramod P.  
Robust Control Theory  
Springer, 1995
- [28] Golub, G. H. und Van Loan, C. F.  
Matrix Computations, 3rd ed.,  
Johns Hopkins University Press, 1996

- 
- [29] Görges, D.; Izak, M.; Liu, S.  
Optimal Control of Systems with Resource Constraints  
Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control, 2007, S. 1070-1075
- [30] Görges, D.; Izak, M.; Liu, S.  
Stabilität und Regelung von Systemen mit unsicherer zeitvarianter Abtast- und Totzeit  
43. Regelungstechnisches Kolloquium in Boppard, 2009
- [31] Grace, Andrew; Laub, Alan J.; Little, John N.; Thompson, Clay M.  
Control System Toolbox  
The MathWorks Inc., 1992
- [32] Gu, D.-W.  
A Frame Approach to  $H_\infty$  Superoptimal Solution  
IEEE TAC, Vol.35, No.7, 1990
- [33] Hetel, L.; Daafouz, J.; Iung, C.  
Stabilization of Arbitrary Switched Linear Systems With Unknown Time-Varying Delays  
IEEE Transactions on Automatic Control 51 (2006), Nr. 10, S. 1668-1674
- [34] Husmann, Heinrich  
Ein Beitrag zur Untersuchung des dynamischen Verhaltens feldbusgestützter Regelkreise  
Fortschrittberichte VDI Reihe 8 Nr. 655, 1997
- [35] Izak, M.; Görges, D.; Liu, S.  
On Stability and Control of Systems with Time-Varying Sampling Period and Time Delay  
Proceedings of the 7th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, S. 1056-1061, 2007
- [36] Izak, M.; Görges, D.; Liu, S.  
Stability and Control of Systems with Uncertain Time-Varying Sampling Period and Time Delay  
Proceedings of the 17th IFAC World Congress, S. 11514-11519, 2008
- [37] Kao, C.-Y.; Lincoln, B.  
Simple stability criteria for systems with time-varying delays  
Automatica 40, 1429-1434, 2004



- 
- [38] Kao, C.-Y.; Rantzer, A.  
Stability analysis of systems with uncertain time-varying delays  
Automatica, vol. 43, no. 6, pp. 959-970, 2007
- [39] Khammash, Mustafa  
Necessary and Sufficient Conditions for the Robustness of Time-Varying Systems with Applications to Sampled-Data Systems  
IEEE, Transactions on Automatic Control, Vol. 38, No. 1, 1993
- [40] Kuo, Benjamin C.  
Digital Control Systems  
Oxford University Press, 1992
- [41] Leonhard, Werner  
Control of Electrical Drives  
Springer-Verlag, 1997
- [42] Leonhard, Werner  
Digitale Signalverarbeitung in der Meß- und Regelungstechnik  
Teubner, 1989
- [43] Leonhard, Werner  
Einführung in die Regelungstechnik  
Vieweg, 1992
- [44] Leonhard, Werner  
Regelung Elektrischer Antriebe  
Springer-Verlag, 2000
- [45] Li, Pu  
Prozessoptimierung unter Unsicherheiten  
Oldenbourg, ISBN 978-3-486-58194-2, 2007
- [46] Liu, G. P.; Mu, J. X.; Rees, D.  
Networked predictive control of systems with random network transmission delay - A polynomial approach  
Proceedings of the 16th IFAC World Congress, July 2005
- [47] Lunze, Jan (Koordinator); Engelke, Andreas (Programmdirektor)  
DFG-SPP 1305: Regelungstheorie digital vernetzter dynamischer Systeme  
Homepage: <http://spp-1305.atp.rub.de/>  
Schwerpunktprogramm 1305 der Deutschen Forschungsgemeinschaft, 2007

- 
- [48] Lunze, Jan  
Regelungstechnik 2: Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung  
Springer, 1997
- [49] Maciejowski, Jan Marian  
Multivariable Feedback Design  
Addison-Wesley, 1989
- [50] Mahamoud, Magdi S.  
Robust Control and Filtering for Time Delay Systems  
Marcel Dekker Inc., New York, 2000
- [51] Makhoul, I. Ben; Chavez, M.  
Regelung von Fahrzeugkolonnen mit topologisch veränderlichem Kommunikations-  
netzwerk auf der Basis von Energiemethoden.  
1. DFG-SPP 1305 Workshop, Bochum, 2008
- [52] Marti, P.; Fohler, G.; Ramamritham, K.; Fuertes, J. M.  
Jitter compensation for real-time control systems  
Proc. 22nd IEEE Real-Time Systems Symposium (RTSS01), London, 2001
- [53] Matiakis, T.; Hirche, S.; Buss, M.  
Networked Control Systems with Time-Varying Delay – Stability through Input-Output  
Transformation  
at-Automatisierungstechnik 56, Oldenbourg, 2008
- [54] MATLAB Reference Guide  
The MathWorks Inc., 1992
- [55] MATLAB User's Guide  
The MathWorks Inc., 1992
- [56] Milke, Burkhard  
Integration serieller Feldbussysteme in hochdynamische Regelkreise  
Shaker Verlag, München, 1998
- [57] Montestruque, L.; Antsaklis, P. J.  
Stability of model-based networked control systems with time-varying transmission  
times  
IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 49, issue 8, 2004

- 
- [58] Müller, Kai  
Entwurf robuster Regelungen  
Teubner, 1996
- [59] Nilsson, Johan  
Real-Time Control Systems with Delays  
Ph.D. Thesis, Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, Sweden, 1998
- [60] Nilsson, J.; Bernhardsson, B.; Wittenmark, B.  
Stochastic analysis and control of real-time systems with random time delays  
Automatica, vol. 34, pp. 57-64, 1998
- [61] Packard, A.; Doyle, J. C.  
Structured Singular Value with Repeated Scalar Blocks  
ACC, Atlanta, 1988
- [62] Packard, A.; Doyle, J. C.  
The Complex Structured Singular Value  
Automatica, Vol. 29, 1993
- [63] Redheffer, R. M.  
On a Certain Linear Fractional Transformation  
J. Math. and Physics, Vol. 39, 1960
- [64] Safonov, Michael G.; Chiang, Richard Y.  
Robust Control Toolbox  
The MathWorks Inc., 1992
- [65] Sanfridson, M.  
Quality of control and real-time scheduling  
Ph.D. dissertation, Royal Institute of Technology, Department of Machine Design, Stockholm, Sweden, 2004
- [66] Schinkel, M.; Chen, W.-H.; Rantzer, A.  
Optimal Control for Systems with Varying Sampling Rate  
Proceedings of the 2002 American Control Conference, 2002, S. 2979-2984
- [67] Schnieder, E.; Chouikha, M.; Ober, B.  
Automatisierter Steuerungsentwurf für diskrete und kontinuierlich-diskrete Systeme  
at - Automatisierungstechnik 49(6), S. 280-289, 2001

- 
- [68] Schnieder, E.; Kraft, K. H.  
Dimensionierung von diskreten, laufzeitbehafteten Regelsystemen mit asynchroner Abtastung  
Regelungstechnik 29(7), S. 219-227, 1981
- [69] Schnieder, Eckehard  
Prozeßinformatik – Automatisierung mit Rechensystemen – Einführung mit Petrinetzen  
2., erweiterte Auflage, ISBN 3-528-13358-9, 1993
- [70] Schumacher, Walter  
Grundlagen der Regelungstechnik  
Vorlesungsskript, Institut für Regelungstechnik, TU Braunschweig
- [71] Schumacher, Walter  
Regelung in der elektrischen Antriebstechnik  
Vorlesungsskript, Institut für Regelungstechnik, TU Braunschweig
- [72] Shamma, J.  
Robust Stability with Time-Varying Structured Uncertainty  
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 39, No. 4, 1994
- [73] Shousongm H.; Qixin, Z.  
Stochastic optimal control and analysis of stability of networked control systems with long delay  
Automatica, vol. 39, pp. 1877-1884, 2003
- [74] Sivashankar, N.; Khargonekar, P.  
Robust Stability and Performance Analysis of Sampled-Data Systems  
IEEE, Transactions on Automatic Control, Vol. 38, No. 1, 1993
- [75] Teske, Nikolas  
Programmierung und Inbetriebnahme einer Motorregelung mit einem digitalen Signalprozessor  
Diplomarbeit am Institut für Regelungstechnik, TU Braunschweig, 1997
- [76] Tzes, A.; Nikolakopoulos, G.; Koutroulis, I.  
Development and experimental verification of a mobile client-client networked controlled system  
European Journal of Control, 2006

- 
- [77] Unbehauen, Heinz  
Regelungstechnik II – Zustandsregelungen, digitale und nichtlineare Regelsysteme  
Vieweg, 1997
- [78] Vidyasagar, M.; Kimura, H.  
Robust Controllers for Uncertain Linear Multivariable Systems  
Automatica, Vol. 22, 1986
- [79] Walsh, G. C.; Ye, H.; Bushnell, L. G.  
Stability Analysis of Networked Control Systems  
IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 10, no. 3, 2002
- [80] Wang, Q.; Stengel, R.F.  
Robust Control of Nonlinear Systems with Parametric Uncertainty  
Automatica, 2002
- [81] Wittenmark, Björn; Nilsson, Johan; Törngren, Martin  
Timing Problems in Real-time Control Systems  
Proceedings of the 1995 American Control Conference, Seattle, WA, USA
- [82] Wittenmark, Björn; Bastian, Ben; Nilsson, Johan  
Analysis of Time Delays in Synchronous and Asynchronous Control Loops  
Proceedings of the 37th Conference on Decision and Control, Tampa, FL, USA
- [83] Yang, Y.; Wang, Y.; Yang, S.-H.  
A networked control system with stochastically varying transmission delay and uncertain process parameters  
Proceedings of the 16th IFAC World Congress, July 2005.
- [84] Young, P. M.; Doyle, John C.  
Computation of  $\mu$  with Real and Complex Uncertainties.  
Proceedings of the 29th IEE Conference on Decision and Control, 1990
- [85] Zhang, W.; Branicky, M. S.; Phillips, S. M.  
Stability of networked control systems  
IEEE Control Syst. Mag., vol. 21, no. 1, pp. 84-99, 2001
- [86] Zhou, Kemin  
Comparison between  $H_2$  and  $H_\infty$  Controllers  
IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.37, No.8, 1992

- [87] Zhou, Kemin  
Robust and Optimal Control  
Prentice Hall, 1995
- [88] Zhou, Kemin  
Essentials of Robust Control  
Prentice Hall, 1998